Друштво математичара Србије
Министарство просвете, науке и технолошког развоја

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

Решења задатака

Први разред - А категорија

1. Приметимо да бројеви $-a, -b$ и $-c$ такође задовољавају услове задатка, па можемо претпоставити да је барем један од бројева a, b и c ненегативан. Дати услов је симетричан, па, без умањења општости, можемо претпоставити да је $a \leqslant b \leqslant c$. По услову задатка је

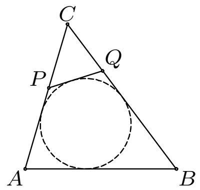
$$|c| + |a| \leqslant |a-b| + |b-c| = b - a + c - b = |c-a|,$$

а из неједнакости троугла, $|c-a| \leqslant |c| + |a|$. Дакле, у свакој од претходних неједнакости мора важити једнакост, па је $c = |c| = |a-b| = b-a$, тј. $b = c + a$.

2. По услову задатка четвороугао $ABQP$ је тангентан, па је $AB + PQ = AP + BQ$, односно

$$AB + PQ = AC - CP + BC - CQ.$$

Самим тим, обим троугла PQC једнак је $a + b - c$. (Тангента 66, стр. 40, зад. 5)



Оп 2014 1А 2

3. Доказаћемо да је $a = b = c = d = 0$ једино решење ове једначине. Претпоставимо супротно, тј. да је четворка целих бројева $(a, b, c, d) \neq (0, 0, 0, 0)$ решење дате једначине. Нека је $u = \text{НЗД}\,(a, b, c, d)$ и $a = ux, b = uy, c = uz, d = ut$. Дељењем полазне једначине са u^2 добијамо

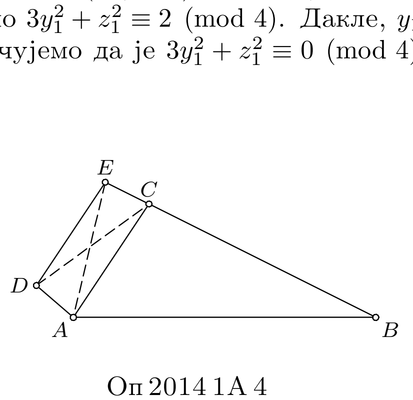
$$6(6x^2 + 3y^2 + z^2) = 5t^2, \qquad (*)$$

при чему је $\text{НЗД}\,(x, y, z, t) = 1$. Из дате једнакости одмах закључујемо да је t дељиво са 6, тј. $t = 6t_1$, $t_1 \in \mathbb{Z}$. Заменом у $(*)$ добијамо $6x^2 + 3y^2 + z^2 = 30t_1^2$, па је $3y^2 + z^2$ паран број, односно y и z су исте парности. Приметимо да квадрати непарних бројева дају остатак 1 при дељењу са 8, а квадрати парних 0 или 4. Ако су y и z непарни бројеви, тада је $3y^2 + z^2 \equiv 4 \pmod 8$, па је и $30t_1^2 - 6x^2 \equiv 4 \pmod 8$, а самим тим и $15t_1^2 - 3x^2 \equiv 2 \pmod 4$. Одавде закључујемо да је $15t_1^2 - 3x^2$ паран број, па су бројеви t_1 и x исте парности. Ако су оба парна, тада је $15t_1^2 - 3x^2 \equiv 0 \pmod 4$, а уколико су оба непарна $15t_1^2 - 3x^2 \equiv 15 - 3 \equiv 0 \pmod 4$, што није могуће. Дакле, бројеви y и z морају бити парни. Нека је $y = 2y_1$ и $z = 2z_1$. Заменом у $(*)$ и дељењем са 12 добијамо

$$3x^2 + 6y_1^2 + 2z_1^2 = 15t_1^2.$$

Дакле, $15t_1^2 - 3x^2$ је паран број, па су x и t_1 исте парности. Како је $\text{НЗД}(x, y, z, t) = 1$, то су x и t_1 непарни. Тада је $3x^2 - 15t_1^2 \equiv 4 \pmod 8$, па је $6y_1^2 + 2z_1^2 \equiv 4 \pmod 8$, односно $3y_1^2 + z_1^2 \equiv 2 \pmod 4$. Дакле, y_1 и z_1 су исте парности, па слично као у претходном делу задатка закључујемо да је $3y_1^2 + z_1^2 \equiv 0 \pmod 4$, што је контрадикција.

4. Изаберимо тачку E на правој BC тако да важи распоред $E - C - B$ и $EC = AD$. По услову задатка је $\sphericalangle ACE = 180^\circ - \sphericalangle ACB = \sphericalangle DAC$, па су троуглови ACD и CAE подударни ($AD = CE, AC = CA$ и $\sphericalangle DAC = \sphericalangle ECA$). Дакле, $\sphericalangle ADC = \sphericalangle BEA$ и $\sphericalangle EAC = \sphericalangle DCA$. Са друге стране, троугао ABE је једнакокраки, па је $\sphericalangle CDA = \sphericalangle BEA = \sphericalangle BAE = \sphericalangle EAC + \sphericalangle CAB = \sphericalangle ACD + \sphericalangle CAB$, што је и требало доказати.



Оп 2014 1А 4

5. Свака екипа одиграла је по 9 мечева, а како нема нерешених резултата, то је $x_i + y_i = 9$, за све $1 \leqslant i \leqslant 10$. На сваком мечу победила је тачно једна екипа, па је збир $x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ једнак укупном броју одиграних мечева, тј. $\binom{10}{2} = 45$. Сада је

$$\begin{aligned} y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_{10}^2 &= (9 - x_1)^2 + (9 - x_2)^2 + \ldots + (9 - x_{10})^2 \\ &= 10 \cdot 81 - 18 \cdot (x_1 + x_2 + \ldots + x_{10}) + x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{10}^2 \\ &= x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{10}^2, \end{aligned}$$

што је и требало доказати. (Тангента 72, М1126)

Други разред - А категорија

1. Дату неједнакост довољно је доказати у случају $\alpha, \beta, \gamma \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, јер за свако $x \in \mathbb{R}$ постоји $x' \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ тако да важи $\sin x' = |\sin x|$ и $\cos x' = |\cos x|$. Тражена неједнакост сада следи из

$$\sin\alpha \sin\beta \sin\gamma + \cos\alpha \cos\beta \cos\gamma \leqslant \max\{\sin\gamma, \cos\gamma\} \cdot (\sin\alpha \sin\beta + \cos\alpha \cos\beta) = \max\{\sin\gamma, \cos\gamma\} \cdot \cos(\alpha - \beta) \leqslant 1.$$

(Тангента 65, стр. 38, зад. 1)

2. Запишимо једначину као квадратну по y: $y^2 - a(x+1)y + (x^2 + ax + a) = 0$. Њена дискриминанта је $D(x) = a^2(x+1)^2 - 4(x^2 + ax + a) = (a^2 - 4)x^2 + (2a^2 - 4a)x + (a^2 - 4a)$. Да би полазна једначина имала реална решења потребно је и довољно да за неко $x \in \mathbb{R}$ важи $D(x) \geqslant 0$. Ако је $|a| > 2$, такво x постоји. Са друге стране, ако је $|a| < 2$, такво x постоји ако и само ако је дискриминанта квадратне једначине $D(x) = 0$ ненегативна. Дакле, $0 \leqslant 4(a^2 - 2a)^2 - 4(a^2 - 4)(a^2 - 4a) = 32a(a-2)$, па је $a \leqslant 0$. Најзад, за $a = 2$ је $D(x) = -4$ за све x, па тада полазна једначина нема решења, а за $a = -2$ је $D(x) = 16x + 12$, што узима и позитивне вредности, па тада полазна једначина има решења.

Одговор је $a \in (-\infty, 0] \cup (2, \infty)$.

3. Уколико број b има тачно k цифара у децималном запису, дати услов еквивалентан је са

$$a + \frac{b}{10^k} = \frac{b}{a},$$

односно $ab = (b - a^2)10^k$. Приметимо да су бројеви b и $b - a^2$ узајамно прости, јер су бројеви b и a^2 узајамно прости. Слично, бројеви a и $b - a^2$ су узајамно прости, па како $b - a^2$ дели ab, то је $b - a^2 = 1$ и $ab = 10^k$. Из прве једнакости је $b > a$, па из друге закључујемо да је $(a, b) = (1, 10^k)$ или $(a, b) = (2^k, 5^k)$ (a и b су узајамно прости). У првом случају добијамо $10^k = 2$, што није могуће. Други случај еквивалентан је са $5^k - 4^k = 1$, односно

$$\frac{5^k}{4^k} - 1 = \frac{1}{4^k}.$$

Приметимо да је за $k > 1$ десна стана претходне једнакости мања од $1/4$, а лева већа од $5/4 - 1 = 1/4$, па је $k = 1$.

Једино решење је пар $(a, b) = (2, 5)$. (Тангента 70, М1090)

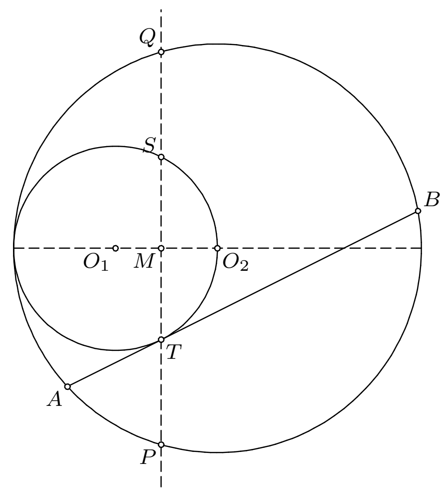
4. Нека је PQ тетива кружнице k_2 која пролази кроз T и нормална је на O_1O_2, и нека она сече праву O_1O_2 у тачки M а кружницу k_1 други пут у тачки S. Како је $\sphericalangle BTO_2 = \sphericalangle O_2ST = \sphericalangle O_2TS$, следи $AT = PT$ и $BT = QT$. Нека је $O_1M = x$. Из Питагорине теореме добијамо

$$\begin{aligned} QM^2 &= QO_2^2 - MO_2^2 = (2r)^2 - (r - x)^2 = 3r^2 + 2rx - x^2 \\ TM^2 &= TO_1^2 - MO_1^2 = r^2 - x^2. \end{aligned}$$

Како је $PT = PM - TM = QM - TM$ и $QT = QM + TM$, добијамо

$$PT^2 + QT^2 = 8r^2 + 4rx - 4x^2 = 9r^2 - (2x - r)^2.$$

Ова вредност достиже максимум за $x = r/2$. Сада из $\triangle TO_1M$ следи $\sphericalangle TO_1M = 60^\circ$, па је $\triangle TO_1O_2$ једнакостраничан, тј. $\sphericalangle ATO_2 = 150^\circ$.



Оп 2014 2А 4

5. Приметимо да су у почетној позицији поља на главној дијагонали табле беле боја, као и да се симетријом у односу на главну дијагоналу бела поља сликају у бела, а црна у црна. Дакле, на почетку је број црних поља паран. Да би остварио свој циљ, Бане може играти на следећи начин: када Аца промени боју пољима i-те по реду врсте гледано од горње ивице, он промени боју пољима i-те по реду колоне гледано слева. Заиста, после сваког одиграног потеза сва поља на главној дијагонали остају беле боје (тачно једном пољу се боја мења и то два пута), а табла остаје симетрична у односу на главну дијагоналу, па је број црних поља паран.

Трећи разред - А категорија

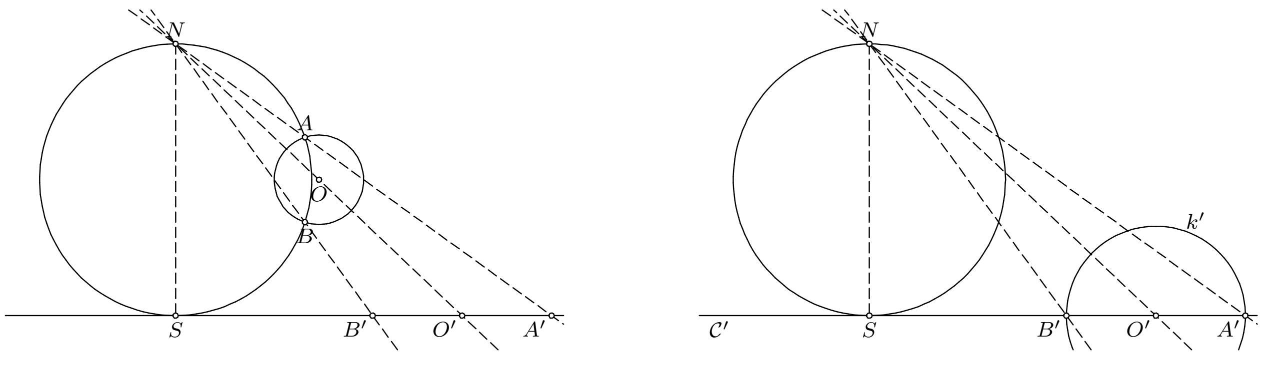
1. Да би дати изрази били дефинисани мора бити $x > 0$ и $y > 0$. Пар $(x, y) = (1, 1)$ је решење датог система. Такође, ако је $x = 1$ тада је $y = 1$, и слично, ако је $y = 1$ тада је $x = 1$. Зато, можемо претпоставити да је $x \neq 1$ и $y \neq 1$. Логаритмовањем (са основом 10) датих једнакости добијамо систем

$$\begin{aligned}(\sqrt[4]{x}+\sqrt{y})\cdot\log x &= \frac{8}{3}\cdot\log y\\ (\sqrt[4]{x}+\sqrt{y})\cdot\log y &= \frac{2}{3}\cdot\log x\end{aligned}\quad, \text{ односно }\quad \begin{aligned}\sqrt[4]{x}+\sqrt{y} &= \frac{8\log y}{3\log x}\\ \sqrt[4]{x}+\sqrt{y} &= \frac{2\log x}{3\log y}\end{aligned}\ .$$

Из последњег система добијамо $4\cdot\log^2 y = \log^2 x$, односно $2\cdot\log y = \log x$ или $2\cdot\log y = -\log x$. Ако је $2\cdot\log y = \log x$, тада $x = y^2$, па из последњег система добијамо $2\sqrt{y} = 4/3$, тј. $(x, y) = (16/81, 4/9)$. Ако је $2\cdot\log y = -\log x$, тада је $\sqrt[4]{x}+\sqrt{y} < 0$, што није могуће.

Решења система су парови $(x, y) = (1, 1)$ и $(x, y) = \left(\dfrac{16}{81}, \dfrac{4}{9}\right)$. (Тангента 72, M1129)

2. Посматрајмо инверзију са центром у N и полупречником NS. Овом инверзијом се кружница $\mathcal{C}$ пресликава у праву t и обратно, права t у кружницу $\mathcal{C}$. Самим тим се тачке A и B пресликавају у тачке A' и B', редом. Кружница k, нормална на кружницу $\mathcal{C}$, пресликава се у кружницу k', нормалну на праву t. То значи да је центар кружнице k' на правој t и да је дуж $A'B'$ пречник кружнице k'. Права NO пресликава се у саму себе, па како је она нормална на кружницу k, нормална је и на њену слику k'. Другим речима, центар кружнице k' лежи на правој ON. Како центар кружнице k' припада и правој t и правој ON, он се поклапа са O'. Тачка O' је центар кружнице k', а $A'B'$ њен пречник, па је O' заиста средиште дужи $A'B'$. (Тангента 65, M982)



Оп 2014 3А 4

3. Нека су n и m јединствени природни бројеви такви да је $x = n^2 + m$ и $0 \leqslant m \leqslant 2n$. За $x \leqslant 3$ решења задатка су $x = 1$ и $x = 3$, па можемо претпоставити да је $x > 3$.

Приметимо да важи $(n-1)x + 1 < (x-1)\sqrt{x}$, јер је то након квадрирања и сређивања еквивалентно са $1 < (2n-3)x(x-1) + mx^2$. Са друге стране је $(x-1)\sqrt{x} < (n+1)x$ (јер је $\sqrt{x} < n+1$ и $x - 1 < x$), па је

$$n - 1 < \frac{\lfloor (x-1)\sqrt{x}\rfloor}{x} < n + 1.$$

Како је по услову задатка $\lfloor (x-1)\sqrt{x}\rfloor$ дељиво са x, то је $[(x-1)\sqrt{x}] = nx$, тј. $nx \leqslant (x-1)\sqrt{x} < nx + 1$. Квадрирањем и сређивањем добијамо $0 \leqslant (m-2)x + 1 < 2n + 1/x$. Лева неједнакост даје $m \geqslant 2$, а десна $(m-2)x \leqslant 2n - 1$. Како је $n \geqslant 2$, то је $x \geqslant n^2 > 2n - 1$, па је $m = 2$. Према томе, сва решења су $x = 1$ и $x = n^2 + 2$ за $n \in \mathbb{N}$.

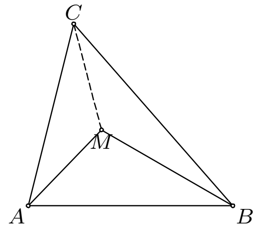
4. Претпоставимо супротно. Тада је $x + y < 60^\circ$, где је $x = \sphericalangle MAB$ и $y = \sphericalangle MBC$. Зато је $\cos(x + y) > 1/2$, те је

$$\sin x \sin y = \frac{\cos(x-y) - \cos(x+y)}{2} \leqslant \frac{1 - \cos(x+y)}{2} < \frac{1 - \frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}. \qquad (*)$$

Са друге стране, применом синусне Чевине теореме, имамо

$$\frac{\sin x \sin y \sin \frac{\gamma}{2}}{\sin 30^\circ \sin 30^\circ \sin \frac{\gamma}{2}} = 1, \quad \text{где је } \gamma = \sphericalangle ACB,$$

односно $\sin x \sin y = \sin^2 30^\circ = 1/4$. Ово је у супротности са $(*)$, те долазимо до контрадикције.



Оп 2014 3А 4

5. Нека је A_n скуп свих поплочавања и $a_n = |A_n|$. Означимо са ξ горњи-леви угао квадратне табле. Нека је H_n скуп поплочавања у коме је ξ покривено хоризонталном домином, V_n скуп поплочавања у коме је ξ покривено вертикалном домином, и K_n скуп поплочавања у коме је ξ покривено квадратом. Тада је $|A_n| = |H_n| + |V_n| + |K_n|$. Очигледно је да је $|V_n| = a_{n-1}$ и $|K_n| = a_{n-2}$. Ако је ξ покривено хоризонталном домином, онда доњи леви угао такође мора бити покривен хоризонталном домином, па је $|H_n| = a_{n-2}$. Закључујемо да је за $n \geqslant 2$ испуњено

$$a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}. \tag{$*$}$$

Такође, имамо да је $a_1 = 1$ и $a_2 = 3$. Уколико додамо a_n и левој и десној страни једнакости $(*)$ добијамо $a_n + a_{n-1} = 2(a_{n-1} + a_{n-2})$, па ако са b_n означимо $b_n = a_n + a_{n-1}$ добијамо да је $b_2 = 4$ и $b_n = 2b_{n-1}$, за $n \geqslant 3$. То значи да је $b_n = 4 \cdot 2^{n-2} = 2^n$, за $n \geq 2$.

Уколико одузмемо $2a_{n-1}$ од леве и десне стране једнакости $(*)$ добијамо $a_n - 2a_{n-1} = -(a_{n-1} - 2a_{n-2})$. Нека је $c_n = a_n - 2a_{n-1}$. Тада је $c_n = -c_{n-1}$, па је $c_n = (-1)^{n-2}c_2 = (-1)^n c_2 = (-1)^n(a_2 - 2a_1) = (-1)^n$. Сада можемо закључити да је $a_n = \dfrac{2b_n + c_n}{3} = \dfrac{2^{n+1} + (-1)^n}{3}$, за све $n \in \mathbb{N}$.

Четврти разред - А категорија

1. Нека је $V(X)$ запремина тела X и $f(x) = V(T \cap [0,x]^3) - V(T \cap [x,1]^3)$. Функција f је дефинисана на $[0,1]$. Ако је $x \in [0,1)$ и $d > 0$ такво да је $x + d \leqslant 1$, онда је

$$\begin{aligned}
f(x+d) - f(x) &= V(T \cap [0,x+d]^3) - V(T \cap [x+d,1]^3) - V(T \cap [0,x]^3) + V(T \cap [x,1]^3) \\
&= V\big(T \cap \big([0,x+d]^3 \setminus [0,x]^3\big)\big) + V\big(T \cap \big([x,1]^3 \setminus [x+d,1]^3\big)\big) \\
&\leqslant V\big([0,x+d]^3 \setminus [0,x]^3\big) + V\big([x,1]^3 \setminus [x+d,1]^3\big) \\
&= d((x+d)^2 + (x+d)d + d^2) + d((1-x)^2 + (1-x)(1-x-d) + (1-x-d)^2) \leqslant 6d
\end{aligned}$$

(јер је $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$ и $0 \leqslant d, x+d, 1-x, 1-x-d \leqslant 1$), па је f непрекидна на $[0,1]$. Како је $f(0) = -\alpha < 0$ и $f(1) = \alpha > 0$, постоји y за које је $f(y) = 0$, па су $K_1 = [0,y]^3$ и $K_2 = [y,1]^3$ коцке које испуњавају услове задатка.

2. а) Нека је X случајна величина која представља број погодака у 4 гађања. На основу редоследа чинилаца и броја сабирака јасно је који је распоред погодака и промашаја у 4 бацања у сваком од наредних случајева:

$$\begin{aligned}
P\{X=0\} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{36}; \\
P\{X=1\} &= 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{17}{72}; \\
P\{X=2\} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} + 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{61}{144}; \\
P\{X=3\} &= 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}; \\
P\{X=4\} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{16}.
\end{aligned}$$

Расподела случајне величине X је $X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{1}{36} & \frac{17}{72} & \frac{61}{144} & \frac{1}{4} & \frac{1}{16} \end{pmatrix}$.

б) Кошаркаш има три поготка у 4 случаја, при чему сваки има исту вероватноћу. У тачно једном од ових случајева се промашај догодио у трећем бацању, па је тражена вероватноћа $1 - \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4}$. (Тангента 68, M1047)

3. Нека је $5pq-1=x^5$, где је $x\in\mathbb{N}$. Тада је

$$5pq = x^5+1 = (x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1). \tag{$*$}$$

По Малој Фермаовој теореми је $x^5 \equiv x \pmod 5$, а из претходне једнакости и $x^5+1\equiv 0 \pmod 5$, па је $x\equiv -1 \pmod 5$. Сада је $x^4-x^3+x^2-x+1\equiv 0 \pmod 5$, па $25 \mid x^5+1$, односно $5 \mid pq$. Како су p и q прости бројеви, закључујемо да је један од њих једнак 5, нпр. $p=5$. Једначина $(*)$ сада постаје $25q=(x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)$. Како је $x+1\geqslant 5$, то је $x^4-x^3+x^2-x+1 = x^3(x-1)+x(x-1)+1>5$, па из

$$q=\frac{x+1}{5}\cdot\frac{x^4-x^3+x^2-x+1}{5},$$

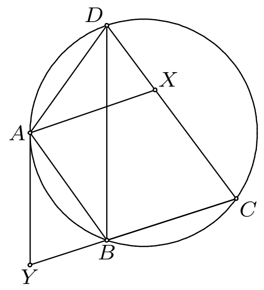
закључујемо да је $x+1=5$, а самим тим $q=41$.

Једина решења су парови $(p,q)\in\{(5,41),(41,5)\}$.

4. Изаберимо тачку Y на правој BC тако да важи распоред $Y-B-C$ и да је $\sphericalangle YAB=\sphericalangle ADB$. Четвороугао $ABCD$ је тетиван, па важи $\sphericalangle ABY = 180^\circ-\sphericalangle ABC=\sphericalangle ADC$, а како је $AB=AD$ и $\sphericalangle YAB=\sphericalangle ADX$, то је $\triangle ABY\cong\triangle ADX$. Из ове подударности је $BY=DX$ и $AY=AX$. Даље, из $\sphericalangle YAB=\sphericalangle ADB$ закључујемо да је AY тангента кружнице описане око четвроугла $ABCD$, па је

$$AX^2=AY^2=YB\cdot YC=DX\cdot(DX+BC),$$

одакле добијамо тражену једнакост.



Оп 2014 4А 4

5. Нека је $ABCD$ дати трапез, при чему је $AB=5$ и $CD=1$. Висина овог трапеза је $\sqrt{3}$. Уочимо правилан шестоугао $CDA_1A_2A_3A_4$ (A_1 се налази у унутрашњости трапеза) и једнакостраничне троуглове $A_1A_2A_5$ и $A_3A_4A_6$ (A_5 и A_6 се налазе ван шестоугла). Како је $CA_3=DA_2=\sqrt{3}$, то се тачке A_2 и A_3, а самим тим и тачке A_5 и A_6, налазе на страници AB. Такође, из $A_2A_5=A_2A_3=A_3A_6=1$ закључујемо да је $AA_5=BA_6=1$. Означимо са O центар шестоугла.

Посматрајмо 11 тачака $O,A,B,C,D,A_1,\ldots,A_6$. Све оне се налази у трапезу, па су прекривене неким од 10 кругова полупречника r. Самим тим, барем две од њих су прекривене истим кругом, па је њихово растојање највише $2r$. Са друге стране, растојање сваке две од ових 11 тачака је барем 1, па је $2r\geqslant 1$, што је и требало доказати. (Тангента 65, М986)

Друштво математичара Србије
Министарство просвете, науке и технолошког развоја

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

Решења задатака

Први разред - Б категорија

1. По дефиницији функције f је

$$f(x) = f\left(2 \cdot \frac{x-1}{2} + 1\right) = 4 \cdot \left(\frac{x-1}{2}\right)^2 + 4 \cdot \frac{x-1}{2} = x^2 - 1,$$

за све $x \in \mathbb{R}$. Специјално, $f(3) = 3^2 - 1 = 8$.

Приметимо да је $f(1) = f(-1) = 0$, па функција није 1-1. Такође, за свако $x \in \mathbb{R}$ важи $f(x) = x^2 - 1 \geqslant -1$, па функција није ни „на”. (Тангента 69, стр. 28, зад. 3)

2. Уколико су истинитосне вредности слова $\tau(p) = \top$, $\tau(q) = \bot$ и $\tau(r) = \top$, тада је $\tau(p \Leftrightarrow (q \vee r)) = \top$, а $\tau((p \wedge r) \Leftrightarrow (q \wedge r)) = \bot$, па дата формула није таутологија. (Тангента 65, стр. 34, зад. 1)

3. Нека је x број људи који су добили лажни лек. Тада је њих $300 - x$ добило прави лек. Пошто 20% људи који су добили лажни лек тврде да им је боље, њих има $\frac{x}{5}$. Такође, 80% оних који су добили прави лек тврде да им је боље, па је њих $\frac{4(300-x)}{5}$. Оних који тврде да им је боље има 40% од 300, односно 120. Дакле, $\frac{x}{5} + \frac{4(300-x)}{5} = 120$, па је $x = 200$. (Тангента 69, M1060)

4. Прву цифру овог броја можемо изабрати на 3 начина. Након одабира прве цифре другу цифру можемо изабрати на два начина (она мора бити различита од прве цифре). Слично, трећу, као и сваку наредну цифру, можемо одабрати на два начина (она мора бити различита од претходно одабране), па је тражени број једнак $3 \cdot 2^{99}$.

5. Имамо три могућности.

1° Оба Француза добила су књигу на француском језику. У овом случају Французима књиге можемо поклонити на 2 начин. За Енглезе имамо 5 могућих књига, па њима књиге можемо поклонити на $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ начина. Дакле, укупан број начина да се особама поклоне књиге је у овом случају $2 \cdot 60 = 120$.

2° Један Француз је добио књигу на француском језику, а други на српском. У овом случају потребно је изабрати који ће од Француза добити књигу на француском језику, затим изабрати једну од две књиге коју ће он добити, а затим изабрати једну од две књиге на српском језику коју ћемо поклонити другом Французу. Дакле, Французима књиге можемо поклонити на 8 начина. За Енглезе остају 4 књиге (три на енглеском и једна на српском језику), па њима књиге можемо поклонити на $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ начина. Укупан број начина да се особама поклоне књиге у овом случају је $8 \cdot 24 = 192$.

3° Оба Француза добила су књиге на српском језику. У овом случају Французима књиге можемо поклонити на 2 начина. За три Енглеза преостале су три књиге, па њима књиге можемо поклонити на $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ начина. Укупан број начина да се особама поклоне књиге у овом случају једнак је $2 \cdot 6 = 12$.

Укупан број начина да се особама поклоне књиге једнак је збиру бројева из случајева $1°, 2°$ и $3°$, односно $120 + 192 + 12 = 324$.

Други разред - Б категорија

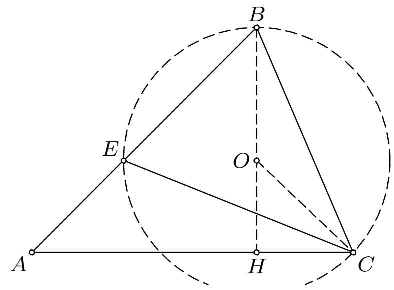
1. Нека је $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$. Тада је $|z+2| = |x+2+yi| = \sqrt{(x+2)^2 + y^2}$ и $|1-\overline{z}| = |1-x+yi| = \sqrt{(1-x)^2 + y^2}$, па је прва од датих једначина еквивалентна са $(x+2)^2 + y^2 = (1-x)^2 + y^2$, односно са $x = -1/2$. Са друге стране,

$$\frac{z}{2+3i} = \frac{x+yi}{2+3i} \cdot \frac{2-3i}{2-3i} = \frac{2x+3y+(2y-3x)i}{13},$$

па је друга једначина еквивалентна са $2x + 3y = 1$, односно, због $x = -1/2$, са $y = 2/3$.

Једино решење датог система једначина је $z = -\frac{1}{2} + \frac{2}{3} \cdot i$. (Тангента 73, стр. 34, зад. 5)

2. Нека је O центар круга k и $\sphericalangle BAC = \alpha$, $\sphericalangle ABC = \beta$, $\sphericalangle BCA = \gamma$. Тада је $\sphericalangle OBC = 90^\circ - \gamma$, а како је троугао BOC једнакокраки, то је и $\sphericalangle OCB = 90^\circ - \gamma$. Сада, из збира углова троугла BOC закључујемо да је $\sphericalangle BOC = 180^\circ - 2\cdot(90^\circ - \gamma) = 2\gamma$. Даље, $\sphericalangle BOC$ је централни а $\sphericalangle BEC$ периферијски угао круга k, па је $2 \sphericalangle BEC = \sphericalangle BOC$, тј. $\sphericalangle BEC = \gamma$. Дакле, $\triangle CBE \sim \triangle ABC$ ($\sphericalangle CBE = \sphericalangle ABC$ и $\sphericalangle BEC = \sphericalangle BCA$), па је $\dfrac{BC}{BE} = \dfrac{BA}{BC}$, тј. $BE = 9$. Коначно, $AE = AB - BE = 7$. (Тангента 68, стр. 38, зад. 2)



Оп 2014 2Б 2

3. Неједначина је еквивалентна са $-\sqrt{21} \leqslant x^2 - 9x - 1 \leqslant \sqrt{21}$. Како је

$$0 \leqslant x^2 - 9x - 1 + \sqrt{21} = (x - 4 - \sqrt{21})(x - 5 + \sqrt{21}) \Leftrightarrow x \in (-\infty, 5 - \sqrt{21}] \cup [4 + \sqrt{21}, \infty)$$
$$0 \geqslant x^2 - 9x - 1 - \sqrt{21} = (x - 4 + \sqrt{21})(x - 5 - \sqrt{21}) \Leftrightarrow x \in [4 - \sqrt{21}, 5 + \sqrt{21}],$$

следи да је решење неједначине $x \in [4 - \sqrt{21}, 5 - \sqrt{21}] \cup [4 + \sqrt{21}, 5 + \sqrt{21}]$. Како је

$$-1 < 4 - \sqrt{21} < 0 < 5 - \sqrt{21} < 1 \text{ и } 8 < 4 + \sqrt{21} < 9 < 5 + \sqrt{21} < 10,$$

следи да су 0 и 9 једини цели бројеви који задовољавају неједначину, тј. неједначина има два целобројна решења.

4. Приметимо да су тачке P, Q и A средишта дужи BC, CD и DR, редом. Нека је $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$. Тачке O, P, A, односно O, Q, B, су колинеарне, па за неке реалне бројеве $k, l < 0$ је $\overrightarrow{OP} = k \cdot \vec{a}$ и $\overrightarrow{OQ} = l \cdot \vec{b}$. Одавде је

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{OP} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OP} + \frac{1}{2} \cdot (-\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}),$$

па је $\overrightarrow{OC} = 2 \cdot \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OB} = 2k \cdot \vec{a} - \vec{b}$. Слично је $\overrightarrow{OD} = 2 \cdot \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OC} = (2l+1) \cdot \vec{b} - 2k \cdot \vec{a}$ и $\overrightarrow{OR} = 2 \cdot \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OD} = (2k+2) \cdot \overrightarrow{a} - (2l+1) \cdot \vec{b}$. Вектори $\overrightarrow{OR}$ и $\overrightarrow{OC}$ су колинеарни, па за неко t важи $t \cdot \overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OC}$, односно

$$t(2k+2) \cdot \vec{a} - t(2l+1) \cdot \vec{b} = 2k \cdot \vec{a} - \vec{b}.$$

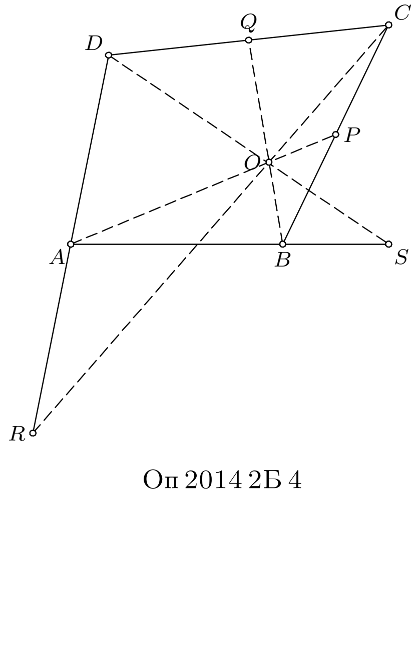
Вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ су линеарно независни, па је $t(2k+2) = 2k$ и $t(2l+1) = 1$, односно $(2l+1)k = k+1$. Даље,

$$\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OB} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} + \frac{1}{2} \cdot (-\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}),$$

тј. $\overrightarrow{OS} = \dfrac{3}{2} \cdot \vec{b} - \dfrac{1}{2} \cdot \vec{a}$. Вектори $\overrightarrow{OS}$ и $\overrightarrow{OD}$ су колинеарни, па за неки реалан број r важи $r \cdot \overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OD}$, односно

$$-\frac{r}{2} \cdot \vec{a} + \frac{3r}{2} \cdot \vec{b} = -2k \cdot \vec{a} + (2l+1) \cdot \vec{b}.$$

Дакле, $r = 4k$ и $3r = 2(2l+1)$, односно $6k = 2l+1$. Сада, заменом у претходно добијену једнакост за k и l добијамо $6k^2 = k+1$, тј. $k = -\dfrac{1}{3}$. Тражени однос једнак је 3.



Оп 2014 2Б 4

5. У две кутије смештено је 65 куглица, па су у једној од њих смештене барем 33 куглице. Све куглице ове кутије су једне од 4 боје, па, по Дирихлеовом принципу, постоји 9 куглица које су исте боје. Претпоставимо да међу ових 9 куглица не постоје три које су исте величине. Тада међу њима постоји барем 5 куглица различитих величина, што је у контрадикцији са условом задатка. (Тангента 73, М1150)

Трећи разред - Б категорија

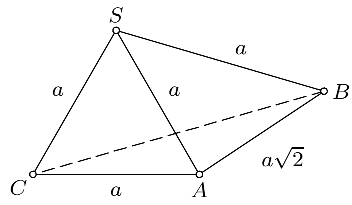
1. Додавањем друге једначине помножене са -1 трећој, и друге једначине помножене са -2 првој, добијамо следећи еквивалентни систем једначина

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x & + & 2y & - & z & + & 4t & = & 2 \\ & & 5y & - & 3z & + & 7t & = & a-2 \\ & & -5y & + & 3z & - & 7t & = & -4. \end{array}$$

Додавањем друге једначине трећој, закључујемо да за $a \neq 6$ систем нема реалних решења. За $a = 6$ једно решење система је четворка $\left(\frac{2}{5}, \frac{4}{5}, 0, 0\right)$, па је $a = 6$ једино решење задатка. (Тангента 70, стр. 30, зад. 5)

2. У троуглу SAB важи $\sphericalangle ASB = 60^\circ$ и $SA = SB$, па је он једнакостраничан, односно $AB = a$. Троугао SCA је једнакокрако-правоугли, па је $AC = a\sqrt{2}$. У троуглу SBC важи $\sphericalangle BSC = 120^\circ$ и $SB = SC$, па је $BC^2 = SB^2 + SC^2 - 2 \cdot SB \cdot SC \cdot \cos 120^\circ$ (по косинусној теореми), односно $BC = a\sqrt{3}$.

а) Како је $BC^2 = AB^2 + AC^2$, из Питагорине теореме закључујемо да је троугао ABC правоугли (са правим углом код темена A).



Оп 2014 3Б 2

б) Нека је са $P(XYZ)$ означена површина троугла XYZ. Из претходног је

$$P(SAB) = \frac{1}{2} \cdot SA \cdot SB \cdot \sin 60^\circ = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}, \quad P(SBC) = \frac{1}{2} \cdot SB \cdot SC \cdot \sin 90^\circ = \frac{a^2}{2},$$

$$P(SCA) = \frac{1}{2} \cdot SC \cdot SA \cdot \sin 120^\circ = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}, \quad P(ABC) = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin 90^\circ = \frac{a^2\sqrt{2}}{2}.$$

Површина пирамиде једнака је

$$P(SAB) + P(SBC) + P(SCA) + P(ABC) = \frac{a^2(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})}{2}.$$

(Тангента 65, стр. 35, зад. 2)

3. За $x = 1$ једино решење је пар $(x, y) = (1, 45)$. Претпоставимо да је $x \geqslant 2$. Како је $2014^x + 11^x$ непаран број, закључујемо да је и y непаран. Са друге стране, $4 \mid 2014^x$, па је $y^2 = 2014^x + 11^x \equiv 11^x \pmod 4$, а како квадрат непарног броја даје остатак 1 при дељењу са 4, закључујемо да је $11^x \equiv 1 \pmod 4$. Међутим, $11^x \equiv 3^x \pmod 4$, па 11^x даје остатак 1 при дељењу са 4 ако и само ако је x паран број. Тада $11^x \equiv 2^x \equiv 1 \pmod 3$, па $y^2 = 2014^x + 11^x \equiv 1 + 1 = 2 \pmod 3$, што није могуће, јер квадрат сваког природног броја даје остатак 0 или 1 при дељењу са 3.

Једино решење је пар $(x, y) = (1, 45)$.

4. Бројеви x и $x - y$ су ненегативни, па важи $x^2 - xy = x(x - y) \geqslant 1 \cdot (x - y) = x - y$. Сада је

$$0 = 2x^2 - xy - 5x + y + 4 = x^2 + x^2 - xy - 5x + y + 4 \geqslant x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2,$$

па је $x = 2$. Заменом у полазну једначину добијамо $y = 2$.

Једино решење једначине је пар $(x, y) = (2, 2)$.

5. По услову задатка, екипа се може састојати од: три девојчице, две девојчице и једног дечака, или једне девојчице и два дечака. У првом случају екипа се може одабрати на $\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2} = 10$ начина. У другом случају екипа се може одабрати на $\frac{5 \cdot 4}{2} \cdot 6 = 60$ начина. У трећем случају екипа се може одабрати на $5 \cdot \frac{6 \cdot 5}{2} = 75$. Дакле, укупан број начина да се екипа одабере једнак је 145. (Тангента 68, стр. 29, зад. 7)

Четврти разред - Б категорија

1. Комплексан број $z+3$ налази се на правој p комплексне равни која пролази кроз координатни почетак и са ненегативним делом реалне осе заклапа угао $\pi/3$. Самим тим, комплексан број z налази се на правој q која је паралална са p и садржи тачку -3, па је минимална вредност броја $|z|$ растојање између праве q и координатног почетка. Права q задата је једначином $y=(x+3)\cdot \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{3}=\sqrt{3}\cdot(x+3)$, па је тражена минимална вредност једнака $\dfrac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3+1}}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

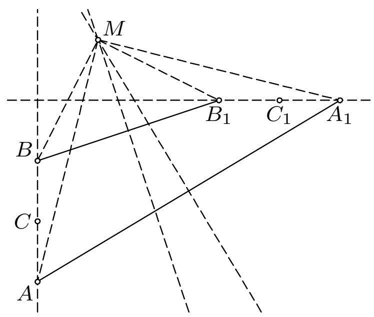
2. Тачка A_1 добија се ротацијом тачке A око тачке M, па је $MA=MA_1$, и M се налази на симетрали дужи AA_1. Нека је $y=k_A\cdot x+c_A$ једначина симетрали дужи AA_1, коју ћемо означити са l_A. Једначина праве AA_1 је $\dfrac{x-1}{6-1}=\dfrac{y-2}{5-2}$, односно $y=\dfrac{3}{5}\cdot x+\dfrac{7}{5}$, па је $k_A=-\dfrac{5}{3}$. Права l_A садржи средиште дужи AA_1, тј. тачку $\left(\dfrac{7}{2},\dfrac{7}{2}\right)$, па је $\dfrac{7}{2}=-\dfrac{5}{3}\cdot\dfrac{7}{2}+c_A$, односно $c_A=\dfrac{28}{3}$. Слично, M се налази и на симетрали l_B дужи BB_1. Нека је једначина праве l_B: $y=k_B\cdot x+c_B$. Једначина праве BB_1 је $\dfrac{x-1}{4-1}=\dfrac{y-4}{5-4}$, тј. $y=\dfrac{1}{3}\cdot x+\dfrac{11}{3}$, па је $k_B=-3$. Права l_B садржи и средиште дужи BB_1, тј. тачку $\left(\dfrac{5}{2},\dfrac{9}{2}\right)$, па је $\dfrac{9}{2}=-3\cdot\dfrac{5}{2}+c_B$, односно $c_B=12$. Тачка $M(x_M,y_M)$ налази се у пресеку правих l_A и l_B, па важи

$$y_M=-\frac{5}{3}\cdot x_M+\frac{28}{3},\qquad y_M=-3\cdot x_M+12.$$

Решавањем овог система добијамо $x_M=2$ и $y_M=6$.

Приметимо да је $\alpha<\pi$, па из $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{A_1M}=(-1,-4)\cdot(4,-1)=0$, добијамо $\alpha=\pi/2$. При томе, ротација је у позитивном смеру.

Приметимо да је тачка C средиште дужи AB. Зато је и тачка C_1 средиште дужи A_1B_1 (ротација је изометријска трансформација), тј. C_1 је тачка $(5,5)$. (Тангента 71, M1111)



Оп 2014 4Б 2

3. Број n можемо записати као $10k+a$, где је $0\leqslant a\leqslant 9$. Приметимо да је $n^2=(10k+a)^2=100k^2+20ka+a^2$, па је цифра десетица броја n^2 једнака цифри десетица броја $20ka+a^2$. Цифра десетица броја $20ka$ је парна, тако да, по услову задатка, цифра десетица броја a^2 мора бити непарна. Провером закључујемо да од бројева a^2, за $0\leqslant a\leqslant 9$, једино $4^2=16$ и $6^2=36$ имају непарну цифру десетица. У оба случаја је цифра јединица броја $n^2=(10k+a)^2$ једнака 6, чиме је доказ завршен. (Тангента 70, стр. 31, зад. 3)

4. Нека је $K=\dfrac{1801+2014}{2}$. Ако је $x\in[1801,K]$, следи $|f(x)|=|f(x)-f(1801)|\leqslant|x-1801|\leqslant\dfrac{2014-1801}{2}$. Ако је $x\in[K,2014]$, следи $|f(x)|=|f(x)-f(2014)|\leqslant|x-2014|\leqslant\dfrac{2014-1801}{2}$. Следи да за свако f са наведеним својствима важи $|f(x)|\leqslant\dfrac{2014-1801}{2}$, тј. $C\leqslant\dfrac{2014-1801}{2}$.

Ако је

$$f(x)=\begin{cases} x-1801, & \text{за } x\in[1801,K]\\ -x+2014, & \text{за } x\in[K,2014]\end{cases},$$

онда f задовољава тражена својства и важи $|f(K)|=\dfrac{2014-1801}{2}$, па је $C=\dfrac{2014-1801}{2}$.

5. Претпоставимо да је за свака два тепиха површина преклопа мања од $\dfrac{1}{9}$. Такође, можемо претпоставити да се теписи у собу додају један по један. Први тепих прекрива површину 1. Под уведеном претпоставком, следећи постављени тепих покрива део пода чија је површина већа од $\dfrac{8}{9}$. Даље, трећи тепих покрива део пода чија је површина већа од $\dfrac{7}{9}$, и тако даље. Последњи, девети тепих покрива део пода чија је површина већа од $\dfrac{1}{9}$. Међутим, како је

$$1+\frac{8}{9}+\frac{7}{9}+\ldots+\frac{1}{9}=5,$$

закључујемо теписи покривају поврхину пода која је већа од 5, што није могуће. (Тангента 70, M1084)