Министарство просвете, науке и технолошког развоја
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Државно такмичење из математике ученика основних школа
29.04.2017.

VI разред

1. Број ученика, који су учествовали на општинском такмичењу, био је троцифрен $\overline{abc}$. Прву награду је добило $\frac{3}{25}$ такмичара и Вера је приметила да је тај број једнак једном од бројева $\overline{ab}$, $\overline{bc}$, $\overline{ac}$. Колико је било такмичара?

2. Марко је прешао неки пут аутомобилом у четири етапе. У првој етапи је за једну петину укупног времена прешао четвртину укупног пута. У другој етапи од 120km је возио брзином која је једнака средњој брзини у последње две етапе. У трећој етапи је прешао две трећине пута преосталог после прве две етапе за 102 минута. Преосталих 72km је прешао у четвртој етапи за тачно један сат. Колики пут је укупно прешао и колико му је времена требало за то?

3. Докажи да је у сваком трапезу (који није паралелограм) разлика дужина основица већа од разлике дужина кракова.

4. Уписана кружница троугла ABC додирује странице BC и AC редом у тачкама P и Q. Права која садржи средиште странице AB и паралелна је са PQ сече праве BC и AC редом у тачкама D и E. Докажи да је $AE = BD$.

5. Из скупа {1, 2, 3, 4, 5} се бирају три броја и помоћу та три броја се попуњава квадратна таблица 3×3 тако да у сваком вертикалном и сваком хоризонталном реду буду уписани различити бројеви. На колико различитих начина је то могуће урадити?

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 180 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Државно такмичење из математике ученика основних школа
29.04.2017.

VII разред

1. Над катетама $AC = b$ и $BC = a$ правоуглог троугла ABC као пречницима конструисане су кружнице k_1 и k_2. Права p додирује те кружнице у тачкама M и N. Изрази дужину MN у зависности од a и b.

2. Ако за реалан број a, $a > 1$, важи једнакост $a-\sqrt{a}=\frac{1}{a}+\frac{1}{\sqrt{a}}$, израчунај $a+\frac{1}{a}$.

3. Одреди све четвороцифрене бројеве $\overline{abcd}$ који су потпуни квадрати и имају особину да постоји цифра k, $k > 0$, таква да је број чије су цифре редом (слева на десно) $a - k$, $b - k$, $c - k$, $d - k$ такође потпун квадрат.

4. Збир тупих углова конвексног многоугла је $2017°$. Колико страница има тај многоугао?

5. Две екипе A и B се на једном математичком квизу боре за гомилу на којој је 2017 бомбона. У овој игри капитени екипа вуку наизменично потезе, а почиње екипа A. У једном потезу је могуће или узети једну бомбону са неке од постојећих гомила или неку од постојећих гомила поделити на две или више мањих гомила са истим бројем бомбона у свакој. У игри побеђује она екипа чији капитен узме последњу бомбону. Докажи да екипа B има победничку стратегију.

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 180 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Државно такмичење из математике ученика основних школа
29.04.2017.

VIII разред

1. Реши систем једначина

$$\frac{x+y}{xyz}=\frac{1}{6}; \qquad \frac{y+z}{xyz}=\frac{4}{15}; \qquad \frac{z+x}{xyz}=\frac{7}{30}.$$

2. Нека је $ABCS$ правилна тространа пирамида, са основом ABC, код које су бочне ивице двапут дуже од ивице основе и нека је E тачка бочне ивице BS. Нагибни угао равни ACE према основи једнак је половини нагибног угла бочне стране према основи. Одреди однос у којем раван ACE дели запремину пирамиде.

3. Нека је N најмањи природан број који има тачно 2017 делилаца у скупу природних бројева. Докажи да N има бар 605 цифара.

4. На страници AB квадрата $ABCD$ је тачка E, а на страници CD тачка F, тако да је $AE : EB = 1 : 2$ и $CF : FD = 1 : 1$. Нека дужи BF и DE секу дијагоналу AC у тачкама N и M, редом. Докажи да су троуглови AME и CFN слични.

5. На 2018 картица исписани су цели бројеви од 0 до 2017. Затим су картице постављене на сто у један ред у произвољном поретку. Играчи A и B наизменично узимају по једну картицу, али при том могу да узму само једну од две крајње картице. Игру почиње играч A. Игра се завршава кад су све картице узете, а победник је играч код кога је збир бројева на узетим картицама већи. Докажи да један од играча има победничку стратегију. Који?

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 180 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.