2006. Opštinsko takmičenje

8. РАЗРЕД

1. Ако су x и a реални бројеви такви да важи $x + \frac{1}{x} = a$, изразити $x^4 + \frac{1}{x^4}$ у функцији од a.

2. Одредити цифре x, y и z такве да је $\frac{1}{x+y+z} = \overline{0,xyz}$. Наћи сва решења.

3. Дужине катета правоуглог троугла ABC су a и b. Симетрала правог угла код темена C сече хипотенузу у тачки D. Израчунати дужину дужи CD.

4. Одредити све реалне бројеве a за које једначина $|x-1|+|x-2|=a$ има бесконачно много решења.

5. Одредити запремину квадра код кога су растојања од тачке пресека дијагонала до ивица једнака 7 cm, 8 cm и 9 cm.

Сваки задатак бодује се са по 20 бодова.
Израда задатака траје 120 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

8. РАЗРЕД

1. У једначини $3 \cdot (x - 4k) - 2k = 3 \cdot (2x - 3) + 1$ број k је реалан параметар. Одредити све вредности тог параметра за које је решење једначине веће од -2.

2. У једнакостраничан троугао ABC уписана су три круга, тако да сваки од њих додирује по две странице и уписани круг k тог троугла. Одредити однос површине круга k и збира површина та три уписана круга.

3. Одредити скуп свих вредности позитивног реалног броја a за које неједначина $|x - 2| < a$ има тачно четири решења у скупу целих бројева.

4. Коцка чија ивица је дужине 10 cm пресечена је једном равни на два квадра. Одредити однос запремина тих квадара ако је однос њихових површина $2 : 3$.

5. На свакој страници квадрата дате су по 3 тачке тако да ниједна од њих није теме квадрата. Колико је троуглова одређено овим тачкама?

8. РАЗРЕД

1. Доказати да је број $2007^{2005} - 2007$ дељив са 90.

2. Бочна страна правилне тростране пирамиде је једнакокраки троугао са углом од 30° при врху. Дужина бочне ивице је 8 cm. Израчунати површину те пирамиде.

3. Израчунати разлику израза $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 2005^2$ и $1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + \cdots + 2004 \cdot 2006$.

4. Хипотенузе BC и AD правоуглих троуглова ABC и ABD секу се у тачки E. Ако је дужина дужи AC једнака 6 cm, а дужина дужи BD једнака 3 cm, израчунати растојање тачке E од дужи AB.

5. Петоцифрен број је "петоразлик" ако су му све цифре различите и припадају скупу $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Израчунати збир свих таквих бројева.

VIII РАЗРЕД

1. Одредити вредност промењиве k тако да једначине

$$\frac{x}{2}+\frac{1}{5}=\frac{x}{3}+\frac{1}{4} \quad \text{и} \quad x\cdot(1-k)+1,5=k\cdot(1-x)$$

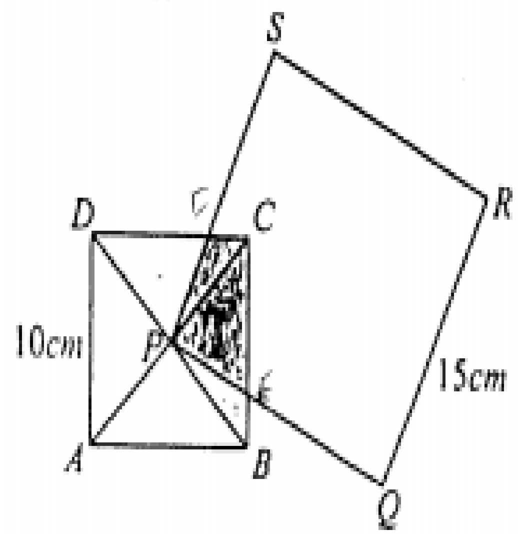
буду еквивалентне.

2. Површина основе правилне четворостране призме је B, а повр једне бочне стране је $2B$. Изрази површину и запремину призме у функцј површине основе B.

3. Реши неједначину $\frac{y}{2}+\frac{y}{3}-\frac{y}{4}<1-\frac{y+6}{3}$.

4. Колико је највише равни одређено са 3 тачке и 3 паралелне праве?

5. Ако је теме квадрата $PQRS$ у пресеку дијагонала квадрата $ABCD$ израчунај површину осенченог дела.



VIII РАЗРЕД

1. Колико има целих бројева x за које важи $\frac{1}{4} < \frac{2-x}{7} < \frac{11}{12}$?

2. Однос површина страна датог квадра је $2:3:5$. Израчунај однос дужина ивица тог квадра.

3. Одреди x ако је $x^2 + \sqrt{3} = \sqrt{4 + 2\sqrt{3}}$.

4. Краци трапеза припадају правама које су међусобно нормалне. Докажи да је збир квадрата дужина дијагонала тога трапеза једнак збиру квадрата дужина основица.

5. Дат је скуп $S = \{8,\ 5,\ 1,\ 13,\ 3,\ 21,\ 2\}$. Милена за сваки двочлани подскуп скупа S на табли записује већи број. Одреди збир бројева које је Милена написала на табли.

19.04.2008 – VIII РАЗРЕД

1. Одреди решења једначине $|x - |x - |x||| = 2\,008$.

2. Теме A троугла ABC је нула линеарне функције $y = \frac{3}{4}x + 12$, а теме B је нула линеарне функције $y = -\frac{4}{3}x + 12$. Теме C је заједничка тачка графика тих линеарних функција.

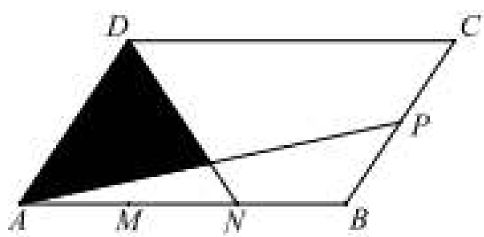
а) Докажи да је троугао ABC правоугли.

б) Израчунај обим и површину троугла ABC.

3. Од папира облика квадрата површине $50cm^2$ изрезана је мрежа правилне четворостране пирамиде тако да се при састављању темена квадрата састају у врху пирамиде (темена квадрата су врхови троугла мреже те пирамиде). За ту пирамиду се зна да је ивица основе два пута мања од висине бочне стране. Колико процената површине квадрата чини површина мреже?

4. Велика коцка је састављена од малих коцки једнаких ивица, али које су обојене црвеном, плавом или белом бојом. Од укупног броја, $\frac{13}{72}$ коцки је црвене боје, а $\frac{25}{48}$ је беле боје. Број плавих коцки је мањи од $1\,000$. Колико има плавих коцки, а колико укупно малих коцки?

5. Тачке M и N деле страницу AB паралелограма $ABCD$ на три једнака дела. Тачка P је средиште странице BC. Који део површине паралелограма чини осенчени део?



Сваки задатак бодује се са по 20 бодова.
Израда задатака траје 150 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.
Забрањена је употреба калкулатора и мобилних телефона.

VIII РАЗРЕД

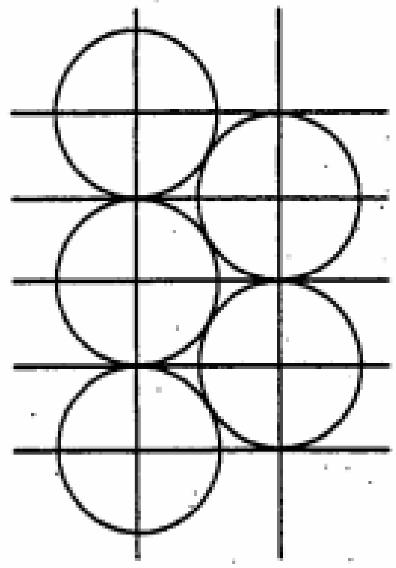
1. Реши једначину

$$\left|x+\left|2x+\left|4x\right|\right|\right|=2009 .$$

2. Три рационална броја a, b и c су таква да је један већи од нуле, један једнак нули и један мањи од нуле. Ако за те бројеве важи

$$\frac{a(c-b)}{b}>0,$$

који од тих бројева је већи, који мањи, а који једнак нули?



3. Колико је растојање (види слику) између суседних правих (водоравних односно усправних) ако су пречници свих кругова по 10cm?

4. Докажи да је број $6^{2n+2}-2^{n+3}\cdot 3^{n+2}+36$ дељив са 900 за сваки природан број n.

5. Основна ивица правилне шестостране призме повећана је за 200%, а висина је смањена за p%. Ако се запремина те призме повећала за p%, одреди да ли се површина омотача повећала или смањила и за колико процената.

VIII РАЗРЕД

1. Докажи да ребус

$$\begin{array}{r} A \\ AB \\ ABC \\ +\underline{ABCD} \\ 2\,0\,0\,9 \end{array}$$

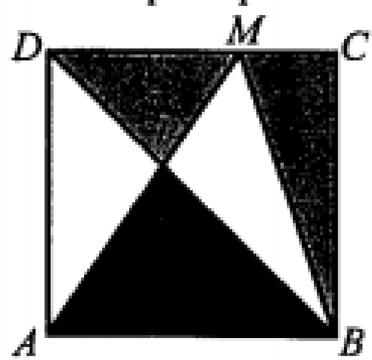
нема решење ако различитим словима одговарају различите, а истим словима исте цифре.

2. Дата је коцка $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Са S је означен центар те коцке. Израчунај запремину пирамиде A_1BC_1S.

3. Ако за природне бројеве a, b и c важи $a+b+c=2010$, докажи да је $a^3+b^3+c^3$ дељиво са 6.

4. Колико има троцифрених бројева у којима ниједна цифра није нула, а производ цифара је дељив са 20?

5. Дат је квадрат $ABCD$. Нека је M произвољна тачка на страници CD и пресек дужи AM и BD је тачка P (види слику). Шта је веће: површина троугла ABP или збир површина троуглова MDP и BCM?



VIII РАЗРЕД

1. Реши једначину $\left|\left|\left|x\right|+1\right|+2\right|=2010$.

2. Површина основе правилне тростране призме је $36\sqrt{3}\text{cm}^2$, а однос површине једне основе и површине омотача је $\sqrt{3}:2$. Израчунај запремину призме.

3. Колико равни одређују темена коцке?

4. Тачка D је пресек симетрале угла BAC и странице BC троугла ABC. Ако је $|AB|=10\text{cm}$ и $|AC|=15\text{cm}$, доказати да је $|AD|<12\text{cm}$.

5. Група људи подели неку суму новца тако што је први добио 10 динара и десетину остатка; други 20 динара и десетину новог остатка; трећи 30 динара и десетину новог остатка, ... и тако све док нису поделили целокупну суму. На крају се испоставило да су сви добили исте суме новца. Колико људи је делило новац?