Министарство просвете Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

5. фебруар 2023.

Први разред - А категорија

1. Дат је скуп $X = \{aca, konac, lopte, loto, prst\}$ и на том скупу две релације ϱ_1 и ϱ_2, које су дефинисане захтевом:

$$x\ \varrho_1\ y \quad \overset{\text{деф}}{\iff} \quad \text{речи} \quad x \text{ и } y \quad \text{су исте дужине,}$$

$$x\ \varrho_2\ y \quad \overset{\text{деф}}{\iff} \quad \text{речи} \quad x \text{ и } y \quad \text{се завршавају истим словом.}$$

(а) Да ли су дате релације рефлексивне, симетричне, антисиметричне и транзитивне?

(б) За сваку од релација ϱ_1 и ϱ_2 испитати да ли је релација еквиваленције, односно, да ли је иста релација поретка. У случају да је нека од њих релација еквиваленције, наћи све класе еквиваленције.

2. Дат је полином P са целобројним коефицијентима за који важи $P(P(2023) + 2023) = 1$. Које све вредности може узети број $P(2023)$?

3. Дат је троугао ABC. Тангенте на описану кружницу тог троугла, конструисане у тачкама B и C, секу се у тачки X. Нека кружница описана око троугла ABX сече праву BC у тачки P и нека кружница описана око троугла ACX сече праву BC у тачки Q. Доказати да се тангенте конструисане у тачкама P и Q на описану кружницу троугла XPQ секу на правој AX.

4. Наћи све природне бројеве n такве да је број $n^2 + 7n + 2$ производ неколико (барем два) узастопних природних бројева.

5. За таблу димензија $m \times n$ (m и n су природни бројеви) њеним скелетом ћемо звати скуп свих дужи које су ивице барем једног од mn јединичних квадрата од којих се иста састоји. Одредити све уређене парове природних бројева (m, n), такве да се скелет табле $m \times n$ може поплочати фигуром која се састоји од две нормалне јединичне дужи које имају једно заједничко теме.

Време за рад 180 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

5. фебруар 2023.

Други разред - А категорија

1. Наћи сва реална решења једначине $x = 506 - (506 - x^2)^2$.

2. Одредити све могуће вредности реалног параметра a, ако се зна да за свако $x \in \mathbb{R}$ постоји барем један $y \in \mathbb{R}$ са својством да је $ax^2 + y^2 + 4xy + 2x + 2y = 0$.

3. Колико има природних бројева који у декадном запису имају 2023 цифре, при чему се, приликом брисања произвољне његове цифре, увек добија број дељив са 7?

4. Добрица и Милица желе да посете 2202 парка и у сваком од њих засаде известан број дрвећа. У сваком парку се на почетку налази по X дрвећа. План је да сваки од паркова обоје посете тачно једанпут. У k-том дану свако од њих ће ујутру обићи тачно један од паркова, не нужно исти, и у њему засадити тачно k дрвећа. Међутим, сваке вечери локални хулигани у сваком парку, у којем постоји барем једно дрво, секу по једно дрво. Због своје безбедности, Добрица и Милица не желе да иду у паркове у којима у тренутку доласка неког од њих нема нити једно дрво. Одредити минималну вредност за X, такву да Добрица и Милица могу да посете све паркове и посаде сво дрвеће као што желе, упркос ометањима хулигана.

5. Нека је тачка I средиште уписане кружнице троугла ABC. Означимо са D тачку пресека симетрале унутрашњег угла у темену A и странице BC тог троугла. Ако важи $BD = 3$, $CD = 4$ и $AD = 6$, наћи дужину дужи AI.

Време за рад 180 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

5. фебруар 2023.

Трећи разред - А категорија

1. Дата је матрица $A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 3 & b \end{bmatrix}$. Одредити све вредности параметара a и b тако да важи матрична једнакост
$$A^2 - 5A = 2I,$$
при чему је са I означена одговарајућа јединична матрица.

2. Урош и Вељко играју игру на табли на којој су на почетку написани редом бројеви $n, n-1, n-2, ..., 1$, при чему је $n > 2$ дати природан број. У сваком потезу Урош има право да највише k пута изабере по два суседна броја са табле и да им замени места. Вељко у сваком потезу бира један број и премешта га на произвољну позицију на табли (може га и оставити на истом месту). Урошев циљ је да на табли буду растуће записани бројеви $1, 2, ..., n$, док је Вељков циљ да га спречи у томе. Колико најмање мора бити k тако да Урош има победничку стратегију?

3. Испитати да ли постоји прост број p, као и природни бројеви a и b, такви да важи $a^p + b^p = (2p-1)!$.

4. У оштроуглом троуглу ABC, $AB < AC$, тачке D, E и F су, редом, подножја нормала из темена A, B и C на одговарајуће странице BC, CA и AB тог троугла. Означимо са K пресек правих EF и BC, а са X тачку на дужи BC такву да је $CX - BX = 2\,(CD - BD)$. Доказати да кружница описана око троугла AKX садржи средиште дужи EF.

5. Ако ненегативни реални бројеви a, b и c задовољавају услов $a + b + c = 3$, наћи максималну могућу вредност израза:

(а) $a + ab + bc + ca$;
(б) $a + ab + bc$.

Време за рад 180 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

5. фебруар 2023.

Четврти разред - А категорија

1. Да ли постоји колекција $\{A_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, подскупова скупа природних бројева таквих да било која коначна подколекција те колекције има непразан пресек, али да важи

$$\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n = \emptyset?$$

2. Дат је троугао ABC. Нека уписана кружница унутар троугла ABC додирује странице AB, BC и CA, редом, у тачкама F, D и E, а споља приписана кружница, која одговара страници BC, нека додирује праве AB и AC у тачкама у G и H, редом. Означимо са X другу тачку пресека кружница описаних око троуглова ABC и AEF, а са Y другу тачку пресека кружница описаних око троуглова ABC и AGH. Доказати да је $BX = CY$.

3. У граду G постоји $n \geqslant 8$ диско-клубова, $n \in \mathbb{N}$, од којих сваки користи светла у тачно једној од две боје, црвеној или плавој. Притом, између одређених клубова постоје директне аутобуске линије, како би грађани овог града могли с лакоћом да мењају места ноћног провода, а уз евентуално преседање, може се стићи из произвољног клуба до произвољног другог клуба. Ако је познато да је сваки диско-клуб повезан директном аутобуском линијом са тачно три друга диско-клуба, међу којима барем два користе светла црвене боје, колико највише може бити клубова са плавим светлима у том граду?

4. Нека су $a = BC, b = CA, c = AB$ дужине страница троугла ABC и нека је h_a дужина висине која одговара страници BC. Наћи највећу могућу вредност израза

$$\frac{a + h_a}{b + c}.$$

5. Одредити све природне бројеве k, такве да постоји бесконачно природних бројева n таквих да важи $\varphi(n) = \dfrac{n}{k}$, где је $\varphi(n)$, $n \in \mathbb{N}$, укупан број природних бројева не већих од n, који су узајамно прости са n.

Време за рад 180 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

5. фебруар 2023.

Први разред - Б категорија

1. Дат је скуп $X = \{aca, konac, lopte, loto, prst\}$ и на том скупу две релације ϱ_1 и ϱ_2, које су дефинисане захтевом:

$$x\ \varrho_1\ y \quad \overset{\text{деф}}{\iff} \quad \text{речи} \quad x \text{ и } y \quad \text{су исте дужине,}$$

$$x\ \varrho_2\ y \quad \overset{\text{деф}}{\iff} \quad \text{речи} \quad x \text{ и } y \quad \text{се завршавају истим словом.}$$

(а) Да ли су дате релације рефлексивне, симетричне, антисиметричне и транзитивне?

(б) За сваку од релација ϱ_1 и ϱ_2 испитати да ли је релација еквиваленције, односно, да ли је иста релација поретка. У случају да је нека од њих релација еквиваленције, наћи све класе еквиваленције.

2. Одредити збир свих природних бројева n таквих да је број

$$\frac{n^2 + 2n + 51}{n^2 + 4n + 3}$$

такође природан.

3. Дат је једнакокраки троугао ABC са основицом AB. Симетрала крака BC сече праву AB у тачки D. На правој CD дата је тачка E тако да је $CE = AD$, при чему се тачка C налази између тачака D и E. Доказати да је троугао DBE једнакокраки.

4. У купеу једног старог воза налазе се две клупе, са по пет места, окренуте једна према другој. Од десет путника који треба да буду смештени у тај купе, њих четворо желе да седе у смеру кретања, док троје од њих желе да седе у смеру супротном од кретања воза. Преосталим путницима смештеним у поменути купе није важна позиција места за седење. На колико начина је могуће тих десет путника сместити у купе, тако да се нико не буни?

5. У скупу реалних бројева наћи сва решења једначине

$$\left|\frac{1}{2x}\right| + \left|\frac{2x-1}{2x}\right| + \left|\frac{2x-2}{2x}\right| = \frac{4}{3}.$$

Време за рад 180 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

5. фебруар 2023.

Други разред - Б категорија

1. Назовимо реалан број d *добрим* ако је за сваки реалан број x испуњено

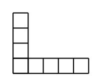
$$\frac{2x^2-14x+27}{x^2-7x+13} \leqslant d.$$

(а) Доказати да је број 8 добар.
(б) Наћи све добре бројеве.

2. У зависности од реалног параметра a дискутовати колико решења има једначина

$$\Big| |x^2+7x+6| - (x^2+7x+10) \Big| = a.$$

3. Дат је троугао ABC. Нека су K_a, K_b и K_c квадрати конструисани у спољашњости троугла ABC над страницама BC, CA и AB, редом. Кружнице описане око квадрата K_b и K_c се секу у тачкама A и L. Доказати да права AL садржи пресек дијагонала квадрата K_a.

4. На колико начина можемо да упишемо бројеве $1, 2, \ldots 8$ у поља фигуре са слике , тако да је сваки од бројева уписан у тачно једно поље фигуре и да, ако је број записан испод неког броја, онда је он већи од тог броја изнад њега, као и да број који је записан десно од неког броја мора бити мањи од броја који је непосредно лево од њега?

5. Да ли постоје природни бројеви a, b и c такви да је вредност израза $(a+b)(b+c)(c+a)$ једнака:

(а) 2023^{2024};
(б) 2024^{2023}?

Време за рад 180 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

5. фебруар 2023.

Трећи разред - Б категорија

1. Поређати бројеве $a = \sin 2023^\circ$, $b = \sin 4046^\circ$, $c = \cos 2023^\circ$ и $d = \cos 4046^\circ$ по величини, тј. од најмањег ка највећем.

2. У скупу реалних бројева решити неједначину
$$\begin{vmatrix} 2023 & x+3 & 1+x \\ 4046 & 3x+6 & 4+x \\ 6069 & x+7 & 5+6x \end{vmatrix} \leqslant 0.$$

3. Дат је разнострани тангентни четвороугао $ABCD$ у коме је $AB = 2$ и $BC = 4$. Ако је унутрашњи угао у темену B тог четвороугла оштар и ако су дужине дијагонале AC и страница CD и DA три узастопна природна броја, не обавезно тим редом, одредити $\measuredangle CAD$.

4. Наћи максималан број елемената скупа $\{1, 2, \cdots, 13\}$ које можемо изабрати тако да међу изабранима не постоје нека три, рецимо a, b и c, $a \neq b$, тако да $a - b \mid c$.

5. У групи од 2023 ученика сваки од њих или увек говори истину или увек лаже. Познато је да сваки ученик зна којој категорији припада он сам, а којој припадају остали ученици, као и да се свих 2023 ученика могу, један иза другог, распоредити у ред тако да свако, осим првог у реду, може да саопшти: "Ја сам иза лажова." Колико таквих редова, од 2023 ученика, је у том случају могуће направити?

Време за рад 180 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

5. фебруар 2023.

Четврти разред - Б категорија

1. У четвороуглу $ABCD$ важи да $AB||CD$. Доказати да важи
$$\frac{PA}{PB} = \left(\frac{PD}{PC}\right)^2,$$
где је P тачка на страници AB таква да је $\measuredangle DAB = \measuredangle DPC = \measuredangle CBA$.

2. Нека је a највећа вредност функције $y = \sin(\sin x)$, $x \in \mathbb{R}$, а b однос најдуже странице и пречника описане кружнице око троугла чије су странице дужина 7, 8 и 13. Шта је веће a или b?

3. Ако је $\log 2 = a$ и $\log 3 = b$, одредити $\log_5 216$ у функцији од a и b ($\log x = \log_{10} x$, $x > 0$).

4. Наћи максималан број елемената скупа $\{1, 2, \cdots, 23\}$ које можемо изабрати тако да међу изабранима не постоје нека три, рецимо a, b и c, $a \neq b$, тако да $a - b \mid c$.

5. На колико начина на класичну шаховску таблу можемо на различита поља распоредити белог и црног краља тако да се не нападају?

Време за рад 180 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.
Решења задатака детаљно образложити.