Министарство просвете, науке и технолошког развоја
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Општинско такмичење из математике
ученика основних школа
02.03.2013 – III разред

1. Замени слова цифрама тако да рачун буде тачан ако знаш да је *ММ* број четврте десетице. Различита слова замени различитим цифрама, а иста слова истим цифрама.

$$\begin{array}{r} М\,М \\ +\quad Л\,Л \\ \hline Д\,М\,С \end{array}$$

2. После 12 минута од почетка филма, Марина је видела да часовник показује тачно 20 сати и 27 минута. Ако филм траје 90 минута, у колико сати ће се завршити?

3. Лопта се котрља на низбрдици. У првој секунди је прешла 3 метра. У другој секунди је прешла 4 метра, а у трећој 5 метара. У свакој следећој секунди прелази по 1 метар више него у претходној. Колико укупно метара је лопта прешла за 10 секунди?

4. Прецртај табелу на папир на коме радиш задатке! Доврши попуњавање табеле:

+			
	467	546	
500	650		826
208			

5. Производ цифара броја 127 је $1 \cdot 2 \cdot 7 = 14$. Напиши све парне троцифрене бројеве чији је производ цифара једнак 12.

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 120 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА - III РАЗРЕД

Признавати свако тачно решење које се разликује од решења у кључу. Бодовање прилагодити конкретном решењу.

1. *ММ* је број четврте десетице, па је *ММ* = 33 (**8 поена**). Како је збир два двоцифрена броја троцифрен број, то је Л = 7 или Л = 8 или Л = 9. Провером добијамо да је Л = 9 (**12 поена**), па сабирање гласи 33 + 99 = 132.

2. (**МЛ45-3**) Филм је почео у 20 сати и 15 минута (**8 поена**). Филм се завршио у 21 сат и 45 минута (**12 поена**).

3. Дужина коју лопта пређе у свакој од 10 секунди дата је у табели.

1. секунда	2. секунда	3. секунда	4. секунда	5. секунда	6. секунда	7. секунда	8. секунда	9. секунда	10. секунда
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

За тачно одређене све дужине путева дати **8 поена**. Дакле, за 10 секунди лопта је прешла укупно 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 = 75 метара (**12 поена**).

4. (**МЛ47-1**) Свако тачно решење бодовати са **2 поена**. Ако је цела табела попуњена тачно бодовати са **20 поена**.

+	**150**	**229**	**326**
317	467	546	**643**
500	650	**729**	826
208	**358**	**437**	**534**

5. (**МЛ47-1**) Како је $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 1 \cdot 2 \cdot 6 = 1 \cdot 3 \cdot 4$, то цифре троцифрених бројева чији је производ цифара 12 могу бити 2, 2, 3 или 1, 2, 6 или 1, 3, 4 (**4 поена**). Тражени бројеви су: 232, 322, 126, 216, 162, 612, 134, 314 (**свако решење по 2 поена**).

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Општинско такмичење из математике
ученика основних школа
02.03.2013 – IV РАЗРЕД

1. Борис је замислио неки број. Када га је помножио са 2 добио је број 43598. Одреди број који је 12 пута већи од броја који је Борис замислио.

2. Укупна маса чаше напуњене са водом је 300 грама и једнака је збиру маса две празне чаше и тега од 60 грама. Колика је маса воде у чаши?

3. Напиши све четвороцифрене бројеве чији је збир цифара 4.

4. Квадрат је са 2 праве подељен на 2 квадрата и 2 правоугаоника. Обим једног од добијених квадрата је 20cm, а обим једног правоугаоника 30cm. Израчунај обим почетног квадрата.

5. Замени слова цифрама тако да рачун буде тачан. Различита слова замени различитим цифрама.

$$\begin{array}{r} A\ B\ C \\ D\ E\ F \\ +\ G\ H\ I \\ \hline 9\ 6\ 3 \end{array}$$

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА - IV РАЗРЕД

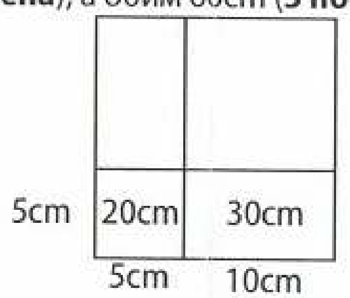
Признавати свако тачно решење које се разликује од решења у кључу. Бодовање прилагодити конкретном решењу.

1. (**МЛ46-2**) Борис је замислио број $43598 : 2 = 21799$ (**10 поена**). Тражени број је $21799 \cdot 12 = 261588$ (**10 поена**).

2. (**МЛ47-1**) Ако је маса једне празне чаше x, тада је $2x + 60 = 300$, одакле је $x = 120$, тј. маса празне чаше је 120 грама (**10 поена**). Како је маса чаше и воде у њој 300 грама, маса воде у чаши је 180 грама (**10 поена**).

3. $4 = 4 + 0 + 0 + 0 = 3 + 1 + 0 + 0 = 2 + 2 + 0 + 0 = 2 + 1 + 1 + 0 = 1 + 1 + 1 + 1$. Дакле, цифре тражених бројева су 4, 0, 0, 0 или 3, 1, 0, 0 или 2, 2, 0, 0 или 2, 1, 1, 0 или 1, 1, 1, 1, а тражени бројеви су:
4000, 1300, 1030, 1003, 3100, 3010, 3001, 2200, 2020, 2002, 2110, 2101, 2011, 1012, 1021, 1102, 1120, 1210, 1201, 1111 (свако решење по **1 поен**).

4. Обим једног квадрата је 20cm, па је страница тог квадрата 5cm (**5 поена**). Обим правоугаоника је 30cm, а како је једна страница правоугаоника једнака страници квадрата, то је друга страница правоугаоника 10cm (види слику) (**5 поена**). Дакле, страница почетног квадрата је 15cm (**5 поена**), а обим 60cm (**5 поена**).



5. Једно решење је (**20 поена**):

$$\begin{array}{r} 1\ 5\ 6 \\ 3\ 2\ 7 \\ +\ 4\ 8\ 0 \\ \hline 9\ 6\ 3 \end{array}$$

Задатак има више решења. Признати као потпуно тачан задатак ако је ученик записао било које друго тачно решење.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

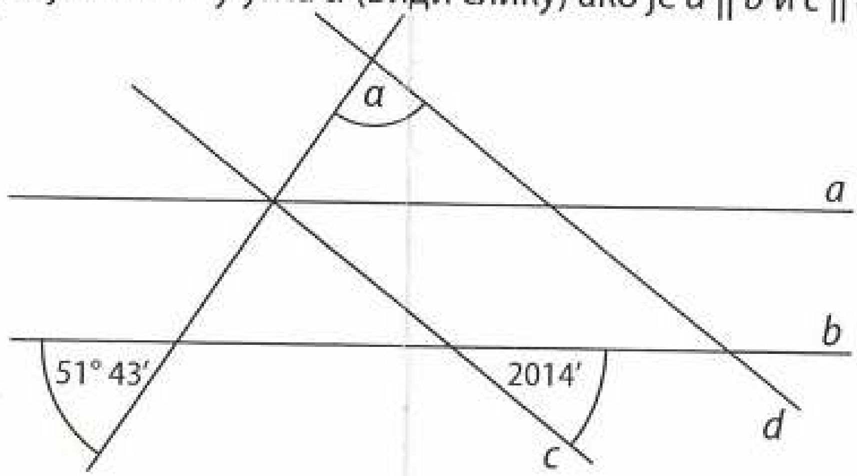
Општинско такмичење из математике ученика основних школа 02.03.2013 – V РАЗРЕД

1. Дешифруј множење $*7 \cdot 30 = *0**$.

2. Израчунај збир најмањег и највећег разломка облика $\frac{a}{b}$ при чему је $a \in \{1, 2, 4, 8\}$ и $b \in \{3, 5, 9\}$.

3. Дужине ивица квадра су a cm, b cm и c cm, где су a, b и c различити природни бројеви. Запремина тог квадра је 70cm^3. Одреди највећу могућу површину тог квадра.

4. Израчунај величину угла α (види слику) ако је $a \parallel b$ и $c \parallel d$.



5. Две оловке и три свеске коштају 110 динара. Четири оловке и седам свезака коштају 250 динара. Израчунај цену осам оловака и осам свезака.

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 120 минута.

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА - V РАЗРЕД

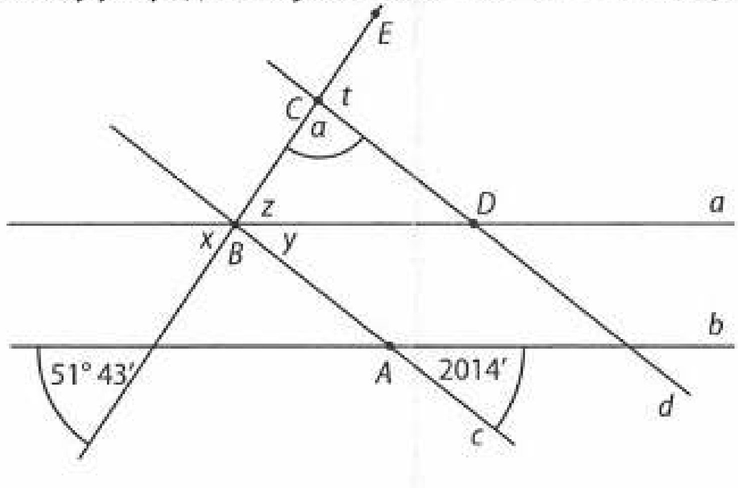
Признавати свако тачно решење које се разликује од решења у кључу. Бодовање прилагодити конкретном решењу.

1. (**МЛ45-2**) Последња цифра производа је 0 (**5 поена**). Даље дешифрујемо $*7 \cdot 3 = *0*$. Последња цифра овог производа је 1 (**5 поена**). Број $*01$ треба да је дељив са 3 и да количник буде двоцифрен број $*7$. Те услове задовољава 201. Дакле, решење је $67 \cdot 30 = 2010$ (**10 поена**).

2. (**МЛ45-5**) Најмањи разломак је $\frac{1}{9}$ (**6 поена**). Највећи разломак је $\frac{8}{3}$ (**6 поена**). Збир је $\frac{1}{9}+\frac{8}{3}=\frac{25}{9}$ (**8 поена**).

3. (**МЛ46-2**) С обзиром да је $70 = 2 \cdot 5 \cdot 7$, то ивице квадра (у cm) могу бити: 2, 5, 7 или 1, 10, 7 или 1, 5, 14 или 1, 2, 35 (**свака могућност по 3 поена**), па су површине квадра (у cm^2), редом, $2 \cdot (2 \cdot 5 + 2 \cdot 7 + 5 \cdot 7) = 118$; $2 \cdot (10 + 7 + 10 \cdot 7) = 174$; $2 \cdot (5 + 14 + 5 \cdot 14) = 178$; $2 \cdot (2 + 35 + 2 \cdot 35) = 214$ (**свака могућност по 2 поена**). Највећа површина квадра који задовољава дате услове је $214cm^2$.

4. Означимо углове x, y, z и t и тачке A, B, C, D и E, као на слици. $x = 51° 43'$, $y = 2014' = 33° 34'$ (углови са паралелним крацима) (**по 4 поена**). $z = x$ (унакрсни углови) (**4 поена**). $\measuredangle ABC = y + z = 85° 17' = \measuredangle DCE = t$ (углови са паралелним крацима) (**4 поена**). Углови t и α су упоредни, па је $\alpha = 180° - 85° 17' = 94° 43'$ (**4 поена**).



5. Како 2 оловке и 3 свеске коштају 110 динара, то 4 оловке и 6 свезака коштају 220 динара. Како 4 оловке и 7 свезака кошта 250 динара, то 1 свеска кошта 30 динара (**8 поена**). Сада добијамо да једна оловка кошта 10 динара (**8 поена**). Дакле, 8 оловака и 8 свезака коштају 320 динара (**4 поена**).

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Општинско такмичење из математике ученика основних школа 02.03.2013 – VI РАЗРЕД

1. Колико има четвороцифрених бројева дељивих са 5, код којих:
а) се цифре могу понављати; б) су све цифре различите?

2. У правоуглом троуглу један оштар угао је 30°. Дужина катете наспрам угла од 30° је 9cm. Израчунај растојање тежишта троугла од:
а) ортоцентра троугла; б) центра описаног круга тог троугла.

3. У троуглу *ABC* угао α је 80°, а висине h_a и h_b секу се под углом од 126°. Која је најмања, а која највећа страница у троуглу *ABC*?

4. Лука је на тастатури хтео да укуца двоцифрени број $\overline{ab}$. Грешком је испред прве цифре и после друге цифре укуцао 4. На тај начин добио је четвороцифрени број 54 пута већи од двоцифреног броја $\overline{ab}$. Одреди број $\overline{ab}$.

5. У квадрату странице 44cm распоређено је 2013 тачака. Докажи да постоји квадрат странице 1cm у коме су бар две тачке.

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 120 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

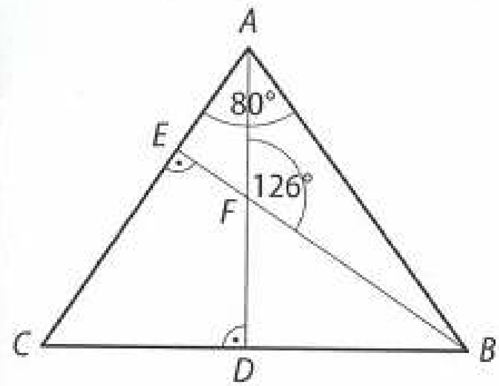
РЕШЕЊА ЗАДАТАКА - VI РАЗРЕД

Признавати свако тачно решење које се разликује од решења у кључу. Бодовање прилагодити конкретном решењу.

1. (**МЛ46-2**) а) Број је дељив са 5 ако се завршава цифром 0 или 5, па закључујемо да се на последњем месту могу наћи 2 цифре. Како цифре могу да се понављају при запису броја, на првом месту могу се наћи 9 цифара (све осим 0), на другом 10 и на трећем 10 па таквих бројева има $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 2 = 1800$ (**10 поена**).
б) Ако су све цифре различите разликоваћемо 2 случаја: 1) На последњем месту је 0 – таквих бројева има $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 1 = 504$; 2) На последњем месту је 5 – таквих бројева има $8 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 1 = 448$; Дакле, укупно имамо 952 четвороцифрена броја дељива са 5 чије су све цифре различите (**10 поена**).

2. Хипотенуза је 18cm (**4 поена**), тежишна дуж која одговара хипотенузи је 9cm (**4 поена**). Ортоцентар правоуглог троугла је у темену правог угла, а центар описане кружнице у средишту хипотенузе. Растојање тежишта од: а) ортоцентра је 6cm (**6 поена**); б) центра описаног круга је 3cm (**6 поена**).

3. (**МЛ45-2**) $\measuredangle AFB = \measuredangle EFD = 126°$. $\gamma = \measuredangle ACB = 180° - \measuredangle EFD = 54°$ (**8 поена**). $\beta = 180° - (\alpha + \gamma) = 46°$. Како је $\alpha > \gamma > \beta$, то је $a > c > b$ (**12 поена**).



4. (**МЛ46-1**) Лука је укуцао број $\overline{4ab4}$ па имамо да је $\overline{4ab4} = 54\overline{ab}$ (**5 поена**). Како је $\overline{4ab4} = 4004 + 10\overline{ab}$ (**5 поена**), имамо $4004 + 10\overline{ab} = 54\overline{ab}$, тј. $4004 = 44\overline{ab}$, одакле је $\overline{ab} = 91$ (**10 поена**).

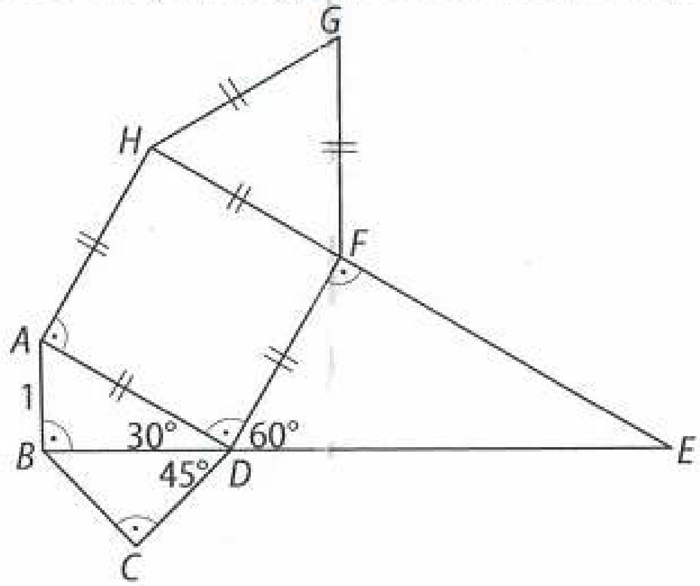
5. Поделимо квадрат правама које су паралелне страницама квадрата на мање квадрате странице 1cm. На тај начин добијамо $44 \cdot 44 = 1936$ мањих квадрата. 1936 тачака можемо распоредити тако да у сваком од посматраних квадрата буде тачно по једна тачка. Ма како распоредили остале тачке свака ће бити у квадрату у коме је бар још једна тачка (од првобитно распоређених 1936 тачака) па следи тврђење задатка (**20 поена**).

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Општинско такмичење из математике
ученика основних школа
02.03.2013 – VII РАЗРЕД

1. Ако је $\sqrt{2}\,x-\sqrt{2}\,y=\sqrt{18}$, израчунај вредност израза $\frac{\sqrt{3}\,x}{3}-\frac{y}{\sqrt{3}}$.

2. Израчунај површину многоугла $ABCDEFGH$ на слици:



3. Одреди све двоцифрене природне бројеве $\overline{ab}$ за које важи $\overline{ab}-\overline{ba}=n^2$, где је $n\in N$.

4. Којом цифром се завршава број $4^n+5^n+6^n$?

5. Конструиши квадрат чија је површина једнака збиру површина три квадрата чије су странице 2cm, 3cm и 4cm.

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 120 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА - VII РАЗРЕД

Признавати свако тачно решење које се разликује од решења у кључу. Бодовање прилагодити конкретном решењу.

1. $\sqrt{2}\,x-\sqrt{2}\,y=\sqrt{18}$, $\sqrt{2}\,(x-y)=3\sqrt{2}$, $x-y=3$ (**7 поена**).

$\frac{\sqrt{3}\,x}{3}-\frac{y}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}\,x}{3}-\frac{\sqrt{3}\,y}{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot(x-y)=\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot 3=\sqrt{3}$ (**13 поена**).

2. (**МЛ46-5**) $AD=2AB=2\text{cm}$. $BD=\sqrt{4-1}=\sqrt{3}\text{cm}$. $BC=CD=\frac{\sqrt{6}}{2}\text{cm}$. $DE=2DF=4\text{cm}$. $EF=2\sqrt{3}\text{cm}$. $P_{BCD}=\frac{3}{4}\text{cm}^2$ (**3 поена**), $P_{ABD}=\frac{\sqrt{3}}{2}\text{cm}^2$ (**3 поена**), $P_{ADFH}=4\text{cm}^2$ (**3 поена**), $P_{HGF}=\sqrt{3}\text{cm}^2$ (**3 поена**), $P_{EFD}=2\sqrt{3}\text{cm}^2$ (**3 поена**).

Дакле, $P=\left(\frac{19}{4}+\frac{7\sqrt{3}}{2}\right)\text{cm}^2$ (**5 поена**),

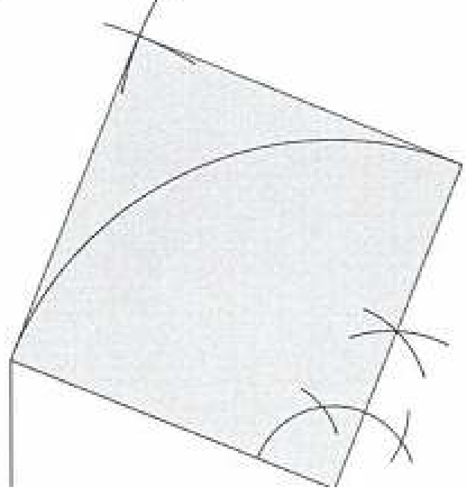
3. (**МЛ47-3**) $\overline{ab}-\overline{ba}=10a+b-(10b+a)=9a-9b=9\cdot(a-b)=n^2$ (**3 поена**) Како је 9 квадрат броја 3, то и $a-b$ мора бити квадрат броја, а то је могуће за $a-b\in\{1,4\}$ (**4 поена**).

a	9	8	7	6	5	4	3	2	9	8	7	6	5
b	8	7	6	5	4	3	2	1	5	4	3	2	1
$a-b$	1	1	1	1	1	1	1	1	4	4	4	4	4

Дакле, тражени бројеви су 98, 87, 76, 65, 54, 43, 32, 21, 95, 84, 73, 62 и 51 (свако тачно решење по **1 поен**).

4. (**МЛ47-3**) Број 4^n се завршава цифром 4, уколико је n непаран број, а цифром 6 ако је n паран број (**4 поена**). Број 5^n се завршава цифром 5 (**2 поена**), а 6^n се завршава цифром 6 (**2 поена**). Ако је n непаран број онда се збир $4^n+5^n+6^n$ завршава цифром 5 $(4+5+6=15)$ (**6 поена**), а ако је n паран број онда се $4^n+5^n+6^n$ завршава цифром 7 $(6+5+6=17)$ (**6 поена**).

5. Како је $2^2+3^2+4^2=29=25+4=5^2+2^2$ (**15 поена**) закључујемо да је страница траженог троугла једнака хипотенузи правоуглог троугла чије су катете 5cm и 2cm. Сада конструишемо квадрат чија нам је страница позната (**5 поена** за конструкцију).



Министарство просвете, науке и технолошког развоја
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Општинско такмичење из математике
ученика основних школа
02.03.2013 - VIII РАЗРЕД

1. Реши једначину $|5x - |4x + |3x - |2x + |x||||| = 2013$.

2. Дате су две једнаке праве призме, чије основе су једнакокраки правоугли троуглови са катетама од 5cm. Висине призми су по 10cm. Колико различитих тространих и четвоространих призми можемо да саставимо од те две једнаке призме? Која од њих има највећу површину?

3. Одреди најмањи природан број који је дељив са 12 и који има 12 делилаца.

4. Нека је T тежиште троугла ABC, а B_1 тачка у којој права BT сече AC. Израчунај површину троугла ABC ако је површина троугла B_1TC једнака 3.

5. Датуми се често записују овако: 22.06.2008, 04.11.1936. Ако су при томе све цифре парне, кажемо да је то паран датум. На пример, последњи паран датум другог миленијума био је 28.08.2000. Одреди број парних датума у трећем миленијуму.

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 120 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА - VIII РАЗРЕД

Признавати свако тачно решење које се разликује од решења у кључу. Бодовање прилагодити конкретном решењу.

1. Ако је $x \geq 0$ имамо: $|5x - |4x + |3x - |2x + |x||||| =$
$|5x - |4x + |3x - |2x + x|||| = |5x - |4x + |3x - 3x||| = |5x - |4x|| = |5x - 4x| =$
$|x| = x$. Па је x = 2013 (**10 поена**).
Ако је $x < 0$ имамо:
$|5x - |4x + |3x - |2x + |x||||| = |5x - |4x + |3x - |2x - x|||| =$
$|5x - |4x + |3x - |x|||| = |5x - |4x + |3x + x||| = |5x - |4x + |4x||| =$
$|5x - |4x - 4x|| = |5x| = -5x$. Сада је $-5x = 2013, x = -\dfrac{2013}{5}$ (**10 поена**).

2. (**МЛ46-3**) Можемо да саставимо 4 различите призме: тространа висине 20cm чија је основа једнакокрако-правоугли троугао (**2 поена**) па је површина $(225 + 100\sqrt{2})\text{cm}^2$ (**2 поена**); четворострана висине 10cm чија је основа квадрат (**2 поена**) па је површина 250cm^2 (**2 поена**); четворострана висине 10cm чија је основа паралелограм (**2 поена**) па је површина $(150 + 100\sqrt{2})\text{cm}^2$ (**2 поена**); тространа висине 10cm чија је основа једнакокрако-правоугли троугао катете $5\sqrt{2}$ cm (**2 поена**) па је површина $(150 + 100\sqrt{2})\text{cm}^2$ (**2 поена**). Највећу површину има тространа призма висине 20 cm (**4 поена**).

3. (**МЛ46-5**) Бројеви дељиви са 12 су: 12, 24, 36, 48, 60, ... Број 12 има 6 делилаца (**3 поена**), 24 има осам (**3 поена**), 36 има девет (**3 поена**), 48 има десет (**3 поена**), а 60 има дванаест и то су: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30 и 60. Дакле, тражени број је 60 (**8 поена**).

4. Ако је површина $P(B_1TC) = 3$, онда је $P(B_1BC) = 9$ (**5 поена**) јер је $3TB_1 = B_1B$ и одговарајуће висине су им једнаке (**5 поена**). Даље је $P(ABC) = 2P(B_1BC) = 18$ (**5 поена**) јер је $AC = 2B_1C$ и одговарајуће висине су им једнаке (**5 поена**).

5. У току једне године постоје 4 парна месеца (02, 04, 06 и 08) (**4 поена**). У једном месецу постоји 9 парних датума (02, 04, 06, 08, 20, 22, 24, 26 и 28) (**4 поена**). У трећем миленијуму постоје 124 парне године $(5 \cdot 5 \cdot 5 - 1)$ (**4 поена**). Према томе, укупан број парних датума је $124 \cdot 9 \cdot 4 = 4464$ (**8 поена**).