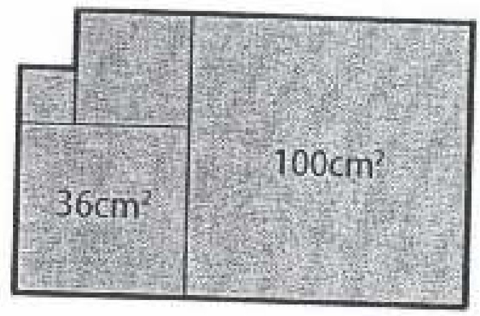
Министарство просвете, науке и технолошког развоја
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Окружно такмичење из математике ученика основних школа
06.04.2013 – IV разред

1. Ружица је замислила један број. Број је умањила за 100, па тако добијени број умањила је 100 пута и добила је број 100. Који број је Ружица замислила?

2. Фигура на слици састављена је од 4 квадрата. Израчунај обим и површину те фигуре ако су на слици дате површине два квадрата.



3. За нумерацију страна једне књиге цифра 1 је употребљена 100 пута. Колико страна има та књига?

4. Дужине ивица квадра су 6cm, 4cm и 3cm. Све стране тог квадра су изрезане од правоугаоног картона чија је једна страница дужине 6cm. При том резању цео картон је искоришћен. Израчунај дужину друге странице тог картона и нацртај како би то резање требало да се уради.

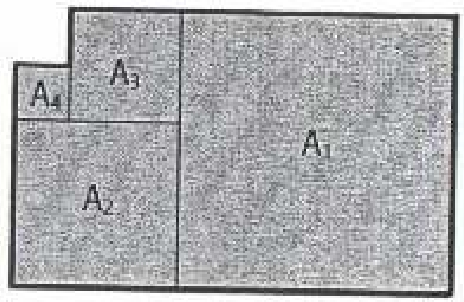
5. Дати су бројеви 192, 64, 32, 16 и 8. Користећи те бројеве и рачунске операције сабирање, одузимање, множење и дељење могу се саставити разни изрази чије су вредности природни бројеви. Који је: а) најмањи, б) највећи природан број који се може добити на тај начин? Сваки од датих бројева се мора користи тачно једанпут и свака рачунска операција тачно једанпут. Није дозвољено користити заграде.

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА - IV РАЗРЕД

Признавати свако тачно решење које се разликује од решења у кључу. Бодовање прилагодити конкретном решењу.

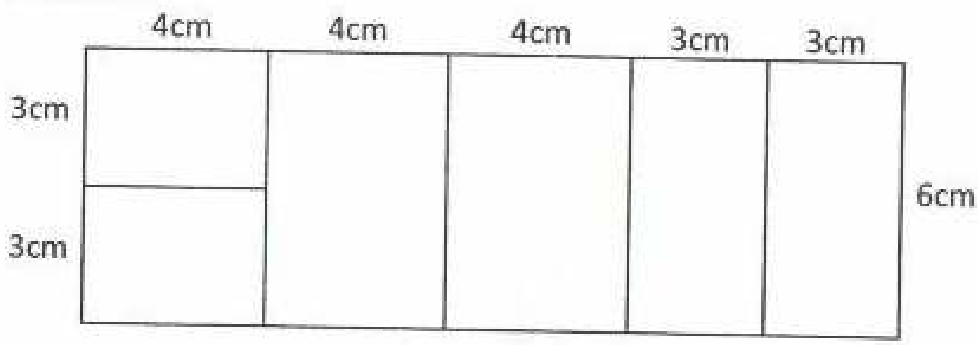
1. (МЛ47/3) Ружица је замислила број 10100 (**20 бодова**).

2. Означимо квадрате као на слици. Дужина странице квадрата A_1 је 10cm (**2 бода**), а квадрата A_2 је 6cm (**2 бода**). Дужина странице A_3 је 10cm – 6cm = 4cm (**3 бода**), а квадрата A_4 је 6cm – 4cm = 2cm (**3 бода**). Површина дате фигуре је 156cm² (**5 бодова**), а обим 52cm (**5 бодова**).



3. За нумерацију првих 99 страна цифра 1 је употребљена 20 пута (**3 бода**). За нумерацију страна од 100 до 109 цифра 1 је употребљена 11 пута (укупно 31 пут) (**3 бода**). За нумерацију страна од 110 до 119 цифра 1 је употребљена 21 пут (укупно 52 пута) (**3 бода**). У свакој следећој десетици друге стотине цифра 1 се употребљава 11 пута: 120-129 – укупно 63 пута; 130-139 – укупно 74 пута; 140-149 – укупно 85 пута; 150-159 – 96 пута (**6 бодова**). Остаје још да се цифра 1 употреби још 4 пута и то за бројеве 160, 161 и 162, па књига има 162 стране (**5 бодова**).

4. Површина квадра је једнака површини картона (**4 бода**). Дакле, $2 \cdot (6 \cdot 4 + 6 \cdot 3 + 4 \cdot 3) = 6 \cdot x$ (**4 бода**), где смо са x обележили тражену дужину друге странице тог картона. $x = 18$cm (**4 бода**). За тачан цртеж **8 бодова**.



5. а) 192 : 64 · 8 + 16 – 32 = 8 (**10 бодова**);
   б) 192 · 64 + 32 – 16 : 8 = 12318 (**10 бодова**).

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Окружно такмичење из математике
ученика основних школа
06.04.2013 – V разред

1. Колико пута је вредност израза $(20,13 : 1,1 - 0,1) : 0,7 + 0,3$ већа од разломка $\frac{26,3}{5}$?

2. Дешифруј рачун: $\frac{AAA}{AB} = A \cdot A$. Различитим словима одговарају различите цифре, а истим словима исте цифре.

3. Обим квадрата је 6cm, а обим правоугаоника је 8cm. Ако је једна страница правоугаоника за 1,2cm дужа од странице квадрата, упореди површину квадрата и површину правоугаоника.

4. Одреди најмањи природан број чији је производ цифара 6048.

5. Одреди угао који заклапају сатна и минутна казаљка часовника у 12 сати и 14 минута.

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА - V РАЗРЕД

Признавати свако тачно решење које се разликује од решења у кључу. Бодовање прилагодити конкретном решењу.

1. Вредност израза је 26,3 (**15 бодова**) па је његова вредност 5 пута већа од датог разломка (**5 бодова**).

2. (МЛ46/4) $\frac{AAA}{AB} = A \cdot A$, $\frac{A \cdot 111}{AB} = A \cdot A$, (**5 бодова**) $\frac{111}{AB} = A$, па је $111 = A \cdot AB$ (**5 бодова**). Како је $111 = 3 \cdot 37$ (**5 бодова**) то је $A = 3$ и $B = 7$, па је $\frac{333}{37} = 3 \cdot 3$ (**5 бодова**).

3. Страница квадрата је 1,5cm (**2 бода**), па је једна страница правоугаоника 2,7cm (**3 бода**). Из обима добијамо да је друга страница правоугаоника 1,3cm (**5 бодова**). Површина квадрата је $2{,}25cm^2$ (**4 бода**), а површина правоугаоника $3{,}51cm^2$ (**4 бода**). Дакле, већа је површина правоугаоника (**2 бода**).

4. $6048 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7$ (**5 бодова**). Како се тражи најмањи број то можемо груписати: $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ и $3 \cdot 3 = 9$ (**5 бодова**). Преостају фактори 2, 2 и 3 од којих можемо формирати бројеве 2 и 6 или 4 и 3. Најмањи број чији је производ цифара 6048 је 26789 (**10 бодова**).

5. У подне сатна и минутна казаљка се поклапају. Минутна казаљка се за 1 минут помери за $360^\circ : 60 = 6^\circ$ (**4 бода**). За 14 минута помери се за 84° (**4 бода**). Сатна казаљка се за 1 минут помери за $30'$ (**4 бода**), а за 14 минута за 7° (**4 бода**). Дакле, угао између казаљки ће бити $84^\circ - 7^\circ = 77^\circ$ (**4 бода**).

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Окружно такмичење из математике
ученика основних школа
06.04.2013 –VI разред

1. Одреди просте бројеве p и q такве да је

$$p^2 + 497q^2 = 2013.$$

2. Одреди цифре x и y различите од нуле ако је број $\overline{xyxyx}$ дељив са 3, а број $\overline{yxyxyxy}$ дељив са 18.

3. Конструиши троугао ABC ако је $a = 5cm$, $\beta = 45°$ и полупречник описане кружнице $3cm$.

4. У скупу целих бројева реши неједначину

$$\frac{1}{3} < \frac{2}{1-x} < \frac{3}{4}.$$

5. Симетрала једне дијагонале правоугаоника сече дужу страницу правоугаоника тако да је један од добијених делова једнак краћој страници . Одреди угао између дијагонала правоугаоника.

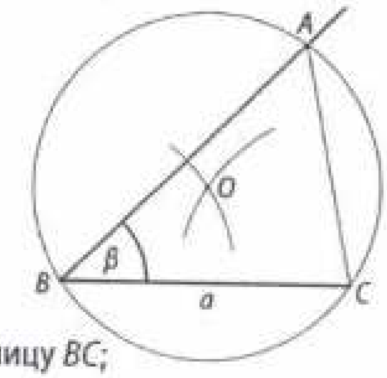
РЕШЕЊА ЗАДАТАКА - VI РАЗРЕД

Признавати свако тачно решење које се разликује од решења у кључу. Бодовање прилагодити конкретном решењу.

1. Како је збир непаран то је један сабирак паран, а други непаран. Дакле, или је $p = 2$ или $q = 2$ (**8 бодова**).
   1) Ако је $p = 2$, то је $497q^2 = 2009$, па q није цео број (**4 бода**).
   2) Ако је $q = 2$, то је $p^2 = 25$, тј. $p = 5$ (**8 бодова**).
   Дакле, решење је $p = 5$ и $q = 2$.

2. Како је $\overline{xyxyx}$ дељиво са 3, то је $3x + 2y$ дељиво са 3, па је и y дељиво са 3, тј. $y \in \{3, 6, 9\}$ (**6 бодова**). Како је $\overline{yxyxyxy}$ дељиво са 18, то y мора бити паран број, па је $y = 6$ (**4 бода**), и $4y + 3x = 24 + 3x$ дељиво са 9, па је $x \in \{1, 4, 7\}$. Дакле, решења су $x = 1, y = 6$ или $x = 4, y = 6$ или $x = 7, y = 6$ (**10 бодова**).

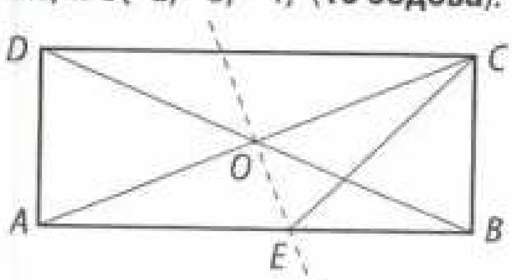
3. (МЛ47/2) Нека је на слици дат троугао ABC који задовољава услове задатка. Центар описане кружнице једнако је удаљен од темена троугла и можемо га одредити у пресеку кружница са центрима у теменима B и C чији су полупречници по 3cm. Конструкцију изводимо на следећи начин:



   а) на произвољној прави конструишемо страницу BC;
   б) у тачки B конструишемо угао од 45°;
   в) центар O конструишемо на претходно описан начин;
   г) тачку A добијамо у пресеку описане кружнице троугла и крака конструисаног угла (**20 бодова**).

4. $\frac{1}{3} < \frac{2}{1-x} < \frac{3}{4}$, $\frac{6}{18} < \frac{6}{3\cdot(1-x)} < \frac{6}{8}$, одакле је $8 < 3(1-x) < 18$ (**10 бодова**), па је $\frac{8}{3} < 1 - x < 6$, тј. $-1\frac{2}{3} > x > -5$. Дакле, $x \in \{-2, -3, -4\}$ (**10 бодова**).

5. Посматрајмо правоугаоник $ABCD$. Симетрала дијагонале пролази кроз пресек дијагонала и сече страницу AB у тачки E. Троугао EBC је једнакокрак и $\angle ECB = \angle CEB = 45°$ (**5 бодова**).



   Троугао ACE је једнакокрак па је $\angle ACE = 22°30'$ (**10 бодова**). Како је $\angle ACB = \angle ACE + \angle ECB = 67°30'$ и троугао OCB једнакокрак, то је тражени угао 45° (**5 бодова**).

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Окружно такмичење из математике ученика основних школа 06.04.2013 – VII разред

1. Ако су x и y природни бројеви и $1 + x^2 - y^2 - 2x = 0$, израчунај $(y-x)^{2013}$.

2. Дата је кружница $k(O, r)$. У кружницу су уписани правилни осмоугао и правилни дванаестоугао. Одреди однос површина ових многоуглова.

3. Одреди све целе бројеве n за које је вредност разломка $\dfrac{3n^2+15}{n+2}$ такође цео број.

4. Од правилног многоугла одсечен је једнакокраки троугао ABC, кога чине три суседна темена. На најдужој страници AC тог троугла постоји тачка K, таква да дуж BK дели троугао ABC на два једнакокрака троугла. Колико страница може да има тај правилни многоугао?

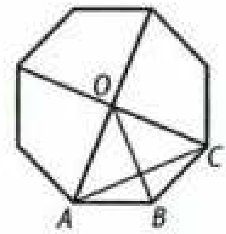
5. У складишту се налази 2013 сулундара. Милашин и Радашин играју следећу игру: они наизменично износе сулундаре из складишта, при чему Радашин сваки пут изнесе 1 или 4 сулундара, а Милашин 2 или 3 сулундара. Први почиње Милашин. Победник је онај који изнесе последњи сулундар. Који од њих двојице може да осигура победу, без обзира како игра његов противник?

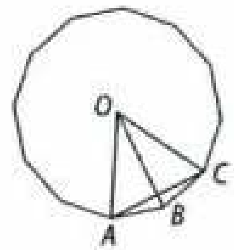
РЕШЕЊА ЗАДАТАКА - VII РАЗРЕД

Признавати свако тачно решење које се разликује од решења у кључу. Бодовање прилагодити конкретном решењу.

1. $1 + x^2 - y^2 - 2x = 0$, $x^2 - 2x + 1 = y^2$, $y^2 = (x - 1)^2$ (**10 бодова**). Како су x и y природни бројеви, то је $y = x - 1$ (**5 бодова**). Сада је $(y - x)^{2013} = (x - 1 - x)^{2013} = -1$ (**5 бодова**).

2. (МЛ47/3) Правилни осмоугао се састоји од четири подударна делтоида, па је $P_8 = 4P_d = 4\cdot\dfrac{d_1d_2}{2} = 2d_1d_2$, где су d_1 и d_2 дијагонале делтоида. Једна дијагонала једнака је полупречнику описане кружнице око осмоугла, $d_1 = OB = r$, а друга $d_2 = AC = r\sqrt{2}$. $P_8 = 2d_1d_2 = 2\cdot r\cdot r\sqrt{2} = 2\sqrt{2}r^2$ (**8 бодова**). Слично, површина правилног дванаестоугла је $P_{12} = 6P_d = 6\cdot\dfrac{d_1d_2}{2} = 3d_1d_2$, $d_1 = r$, $d_2 = r$. $P_{12} = 3d_1d_2 = 3r\cdot r = 3r^2$ (**8 бодова**). Однос површина ових многоуглова је $P_8 : P_{12} = \dfrac{2\sqrt{2}r^2}{3r^2} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$, $P_8 : P_{12} = 2\sqrt{2} : 3$ (**4 бода**).





3. $\dfrac{3n^2+15}{n+2} = \dfrac{3n^2-12+27}{n+2} = \dfrac{3(n-2)(n+2)}{n+2} + \dfrac{27}{n+2} = 3(n-2) + \dfrac{27}{n+2}$ (**12 бодова**).

Вредност почетног разломка је цео број када је $\dfrac{27}{n+2}$ цео број. Дакле, $n+2 \in \{-27, -9, -3, -1, 1, 3, 9, 27\}$, па је $n \in \{-29, -11, -5, -3, -1, 1, 7, 25\}$ (свако решење по **1 бод**).

4. Постоје два тражена многоугла.

1) Нека је $AB = AK$ и $BK = KC$ (види слику). Означимо углове као на слици. Како је $\angle BAC = \angle BCA$ то је $180° - 4x = x$, па је $x = 36°$. Дакле, унутрашњи угао је $3x = 108°$, па је реч о правилном петоуглу (**14 бодова**).

2) Ако је $AK = BK$ и $CK = KB$ тада је $\angle ABC = 90°$, па је тражени многоугао квадрат (**6 бодова**).

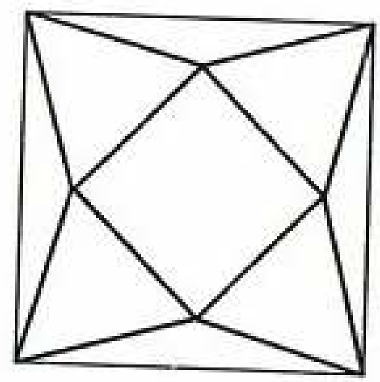
5. Милашин. Првим потезом Милашин износи 3 сулундара. У даљем току игре, Милашин увек износи по 2 сулундара. На тај начин после сваког његовог потеза број сулундара је дељив са 3, док после сваког Радашиновог потеза број преосталих сулундара при дељењу са 3 даје остатак 2. Јасно је онда да ће последњи сулундар изнети Милашин (**20 бодова**).

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Окружно такмичење из математике
ученика основних школа
06.04.2013 – VIII разред

1. У произвољном трапезу $ABCD$ основица DC је два пута мања од основице AB. Из темена B повучена је нормала BE на праву AD. Докажи да је $CE = CB$.

2. Мрежа правилне четворостране пирамиде је уцртана у квадрат странице $7\sqrt{2}\text{cm}$ (види слику). Израчунај запремину те пирамиде ако су основна и бочна ивица у размери 6 : 5.



3. Стана и Брана су кренуле једна у сусрет другој. Када је Стана прешла петину пута, а Брана 1300 метара растојање између њих било је три пута дуже од пута који је Стана прешла. Колико су биле удаљене једна од друге на почетку?

4. Дате су линеарне функције $y = 3x + a$, $y = -2x + b$ и $y = x + 1$. Изрази a у функцији од b ако графици ове три функције имају једну заједничку тачку.

5. Дата је једначина $8x + 3y = 2013$. Нека су $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ парови природних бројева који задовољавају дату једначину. Израчунај збир $x_1 + x_2 + \ldots + x_n$.

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА - VIII РАЗРЕД

Признавати свако тачно решење које се разликује од решења у кључу. Бодовање прилагодити конкретном решењу.

1. Права кроз C паралелна са AD сече основицу AB у средишту K. По Талесовој теореми, та дуж полови и дуж BE, а како је паралелна са AD, она је и нормала на BE. Дакле, CK је симетрала дужи BE, па је $CE = CB$ (**20 бодова**).

2. Обележимо са a, b, h и H, редом, дужине основне ивице, бочне ивице, апотеме и висине пирамиде. Тада из бочне стране пирамиде (једнакокраког троугла) следи да је $a : h = 6 : 4$ (**4 бода**). Нека је $a = 6x$, $h = 4x$. Важи да је $4x + 6x + 4x = 7\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$, (**4 бода**) односно $14x = 14$, па је $x = 1$. Дакле основна ивица ове пирамиде је 6cm, а апотема 4cm (**4 бода**). Висина пирамиде је $H^2 = h^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$, $H = \sqrt{7}\text{cm}$ (**4 бода**). Тражена запремина је $V = \frac{6^2\sqrt{7}}{3}$, $V = 12\sqrt{7}cm^3$ (**4 бода**).

3. (МЛ45/2) Означимо дужину укупног пута који су прешле са x. Пут који су обе прешле када је прва прешла петину пута, а друга 1300 метара, је $\frac{1}{5}x + 1300$ (**5 бодова**). Пут који им је остао да пређу до сусрета је $x - \left(\frac{1}{5}x + 1300\right)$ (**5 бодова**). Како је ово растојање три пута дуже од пута који је Стана прешла имамо да је $x - \left(\frac{1}{5}x + 1300\right) = \frac{3}{5}x$ (**5 бодова**). Решавањем ове једначине долазимо до траженог растојања од 6,5km (**5 бодова**).

4. Графици функција имају једну заједничку тачку, па следе једнакости $3x + a = x + 1$, $-2x + b = x + 1$, односно $2x = 1 - a$, $3x = b - 1$ (**8 бодова**). Сада је $x = \frac{1-a}{2}, x = \frac{b-1}{3}$, одакле је $\frac{1-a}{2} = \frac{b-1}{3}$ (**8 бодова**). Дакле, тражена веза је $3a + 2b = 5$, тј. $a = \frac{-2b+5}{3}$ (**4 бода**).

5. Како је $8x + 3y = 2013$, то је $8x = 3\,(671 - y)$, па је $x = 3k$ (**5 бодова**). Сада је $24k = 3\,(671 - y)$, одакле је $y = 671 - 8k$ (**5 бодова**). Како је $x_n > 0$ и $y_n > 0$, то је $k > 0$ и $671 - 8k > 0$, па је $0 < k < 83\frac{7}{8}$ или $1 \le k \le 83$ (**5 бодова**). Дакле, $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 3 + 6 + \ldots + 3 \cdot 83 = 3 \cdot (1 + 2 + \ldots + 83) = 10458$ (**5 бодова**).