

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ
16.05.2021. године

VI разред

1. У разностраничан троугао ABC уписан је круг k чији је центар тачка O . Конструисане су праве p и q , које садрже тачку O , такве да је $p \parallel AC$ и $q \parallel BC$. Права p сече страницу AB у тачки M , а права q сече страницу AB у тачки N . Докажи да је обим троугла OMN једнак дужини странице AB .
 2. а) Да ли постоје четири различита природна броја таква да је збир свака три од њих прост број?
б) Да ли постоји пет различитих природних бројева таквих да је збир свака три од њих прост број?
 3. Збир цифара природног броја n једнак је збиру цифара броја $5n$. Докажи да је број n дељив са 9.
-
-

4. Колико различитих решења има следећи бројевни ребус (истим словима одговарају исте, а различитим словима различите цифре)?

$$\begin{array}{r} A B B C B \\ + B C A D A \\ \hline D B D D D \end{array}$$

5. У троуглу ABC је $\sphericalangle BAC = 45^\circ$. Нека је M тачка на страници AC таква да је $MC = 2AM$ и $\sphericalangle ABM = 15^\circ$. Одреди меру угла ACB .

VII разред

1. Одреди остатак при дељењу броја $25 \cdot 3^{2021}$ бројем $4 \cdot 3^{2020}$.
2. Нека је $ABCDEF$ правилни шестоугао странице 1 cm. Означимо са X , Y и Z редом средишта страница AB , CD , EF . Израчунај обим и површину шестоугла који се добија као пресек троуглова ACE и XYZ .
3. Одреди све целе бројеве n такве да је број $n^3 - 2n^2 + 2n - 4$ прост.
4. Да ли се природни бројеви од 1 до 15 могу поделити у два скупа A и B тако да се у скупу A налазе два, а у скупу B тринаест бројева и да је збир бројева скупа B једнак производу бројева из скупа A ?
5. Странице троугла ABC су $AB = 125$ cm, $AC = 117$ cm, $BC = 120$ cm. Симетрала унутрашњег угла код темена A сече дуж BC у тачки L , док симетрала унутрашњег угла код темена B сече AC у тачки K . Нека су M и N подножја нормала из тачке C редом на BK и AL . Одреди дужину дужи MN .

VIII разред

1. Углови на већој основици трапеца су по 60° , а његов обим је 200cm. Одреди дужину веће основице тако да површина трапеца буде максимална.
 2. Правилна шестострана призма има основну ивицу дужине 1 cm и висину дужине 2 cm. Одреди број троуглова чија су темена уједно и темена дате призме, а све странице су различитих дужина.
 3. Одреди све тројке простих бројева (a, b, c) за које важи неједнакост $abc < ab + bc + ca$.
 4. Нека су A и B две тачке на кружници $k_1(C, r)$ које нису дијаметрално супротне. Права p садржи тачку C и паралелна је правој AB , а права q садржи тачку A и паралелна је правој BC . Нека је D пресечна тачка праве q и кружнице $k_2(A, AB)$. Докажи да се праве p и DB секу на кружници k_1 .
 5. Да ли се могу одредити цифре a и b ($a \neq 0$) такве да је дванаестоцифрени број $\overline{abbaabbaabba}$ квадрат природног броја?
-
-