DRŽAVNO TAKMIČENJE 2013. GODINE

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ
11.05.2013. године

VI разред

1. Бранко и Ратко трче трку. Ратко има за 15% дужи корак од Бранка, али зато за исто време направи 15% мање корака од Бранка. Ко ће пре стићи на циљ?

2. Бане се јутрос сетио да има домаћи задатак из матеметике и урадио га је пре поласка у школу, између 7 и 8 сати. Када је почео да ради домаћи, казаљке на часовнику су биле једнако удаљена од цифре 6 и нису се поклапале. Када је завршио домаћи казаљке су се поклопиле. Колико времена је Бане радио домаћи?

3. а) Докажи да симетрала унутрашњег угла код темена А троугла АВС пролази кроз тачку пресека симетрала спољашњих углова код темена В и С.
   б) Конструиши троугао ако су дате тачке пресека симетрала спољашњих углова.

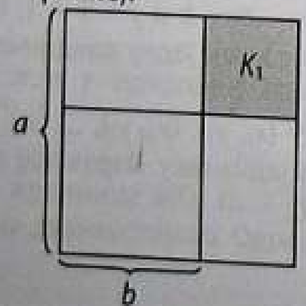
4. Нађи најмањи природан број чији се збир цифара смањи за 2013 када се тај број повећа за 3.

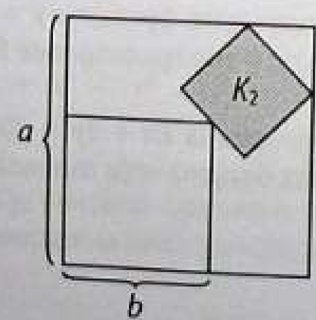
5. Све странице трапеза *ABCD* су различитих дужина. Дужине основица су 20cm и 10cm. Нека су *M* и *N*, редом, средишта основица *AB* и *CD*. Ако је дужина дужи *MN* једнака 5cm, докажи да се праве одређене страницама *BC* и *AD* секу на кружници чији је пречник основица *AB*.

VII РАЗРЕД

1. Одреди цифре a, b и c тако да важи $\left(\overline{ab}\right)^{a}=\overline{bcb}$.

2. У квадрату су нацртана два квадрата као на сликама (обе слике су осносиметричне).





Површина квадрата K_2 је 256. Израчунај површину квадрата K_1.

3. Нека су a, b и c позитивни реални бројеви такви да је апсолутна вредност разлике свака два мања од 2. Докажи да је

$$a+b+c<\sqrt{ab+1}+\sqrt{bc+1}+\sqrt{ac+1}.$$

4. Нека су k_1, k_2, k_3, k_4 четири кружнице једнаких полупречника које имају заједничку тачку O при чему се никоје две не додирују. Означимо са A, B, C, D редом пресечне тачке суседних кружница k_1 и k_2, k_2 и k_3, k_3 и k_4, k_4 и k_1, различите од тачке O. Докажи да је четвороугао $ABCD$ паралелограм.

5. Уочено је 9 темена правилног 16-тоугла. Докажи да постоји једнакокраки правоугли троугао са теменима у уоченим тачкама.

VIII РАЗРЕД

1. Реши систем једначина:

$$x - 2y - 1 = 0$$
$$x^2 - 4y^2 + 4y - 17 = 0.$$

2. Докажи да важи неједнакост

$$2013 < \frac{2^2+1}{2^2-1} + \frac{3^2+1}{3^2-1} + \ldots + \frac{2013^2+1}{2013^2-1} < 2013 + \frac{1}{2}.$$

3. Правилна тространа пирамида $VABC$ пресечена је са равни која садржи средишта основних ивица AB и AC и паралелна је са бочном ивицом AV. Израчунај обим и површину пресека ако је дужина основне ивице 12cm, а дужина бочне ивице 14cm.

4. Дат је правилан 2013-угао. На колико начина се могу изабрати три његова темена која су истовремено и темена једног једнакокраког троугла?

5. Нека је O тачка на кружници $k(S, r)$. Кружница m са центром у тачки O сече кружницу k у тачкама P и Q. Нека је R тачка у унутрашњости кружнице k у којој се секу кружница m и кружница $s(Q, QO)$, а L друга тачка пресека праве PR и кружнице k. Докажи да је дуж LR једнака полупречнику кружнице k.