Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

28. фебруар 2015.

Први разред – А категорија

1. Нека су a, b и c произвољни природни бројеви. Доказати неједнакост

$$\text{НЗД}(a, b-1) \cdot \text{НЗД}(b, c-1) \cdot \text{НЗД}(c, a-1) \leqslant ab + bc + ca - a - b - c + 1,$$

као и да се једнакост достиже за бесконачно много тројки (a, b, c).

2. Дат је једнакокраки $\triangle ABC$, при чему важи $AB = AC$. Унутар $\triangle ABC$ уочена је тачка P таква да важи $\measuredangle BPC = 90^\circ + \frac{\measuredangle BAC}{2}$. Такође је уочена тачка Q таква да важи $\measuredangle BPQ = \measuredangle PQA = 90^\circ$. Нека је R тачка на дужи QB таква да важи $BR = 2RQ$. Доказати да су тачке R, P и C колинеарне.

3. Чувар банке има n сефова које мора да чува и сваки сеф има свој јединствен кључ који га отвара. Кључеви су по изгледу идентични. Чувар је добио на располагање довољан број идентичних кружних металних алки. На сваку алку могуће је закачити произвољан број кључева или других алки (али не могу на истом кључу бити прикачене две алке), при чему су алке такве да се, након што чувар прикачи све што жели, цикличан редослед закачених објеката на алки потом неће реметити. Чувар жели да помоћу алки споји све кључеве у једну целину на такав начин да надаље увек буде у могућности да, на основу распореда кључева и алки, идентификује кључ који му затреба за отварање одређеног сефа (без испробавања кључева на сефу). За задат број $n > 1$, одредити најмањи број алки које су потребне чувару уколико:

a) кључеви имају једну осу симетрије у равни кључа (слика лево);
b) кључеви немају ниједну осу симетрије у равни кључа (слика десно)?

4. Да ли постоји полином $P(x)$ коме нису сви коефицијенти целобројни такав да важи $P(0) = 0$ и да је $\frac{P(a)-P(b)}{a-b}$ цео број за свака два различита цела броја a и b?

Време за рад 240 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

28. фебруар 2015.

Други разред – А категорија

1. Нека је x реалан број такав да је израз $\sqrt{x-\sqrt{x-\sqrt{x}}}$ дефинисан и важи

$$\sqrt{x-\sqrt{x-\sqrt{x}}} \leqslant 1.$$

Доказати:

$$\sqrt{x+\sqrt{x-\sqrt{x}}} < 2.$$

2. Нека функција obrt пресликава цифре $0,1,2,5,6,8,9$ у цифре $0,1,2,5,9,8,6$, редом. Природан број $n=\overline{t_k t_{k-1}\cdots t_1 t_0}$ називамо *обртабилан* ако су му све цифре из скупа $\{0,1,2,5,6,8,9\}$ и притом важи $t_0 \neq 0$, и дефинишемо

$$\mathrm{obrt}(n)=\overline{\mathrm{obrt}(t_0)\mathrm{obrt}(t_1)\cdots\mathrm{obrt}(t_{k-1})\mathrm{obrt}(t_k)}$$

(другим речима, функција obrt представља обртање екрана калкулатора за 180°). Доказати да постоји бесконачно много природних бројева n са следећим особинама:
1° n је обртабилан и $\mathrm{obrt}(n)=n$;
2° n^2 је обртабилан и $\mathrm{obrt}(n^2)=n^2$;
3° $41 \mid n$.

3. На сваком пољу табле $3\times n$ налази се један жетон који је са једне стране обојен бело а са друге стране црно. У почетку су сви жетони окренути црном страном нагоре. Дозвољено је у једном потезу изабрати произвољно поље и окренути све жетоне на пољима која имају бар једно заједничко теме са изабраним пољем али не и жетон на изабраном пољу. За које n је могуће да после извесног броја потеза сви жетони буду окренути белом страном нагоре?

4. Дат је оштроугли $\triangle ABC$. Тачка N је таква да важи $\measuredangle NBA=\measuredangle NCA=90^\circ$, а D и E су тачке на страницама AC и AB, редом, такве да важи $\measuredangle BNE=\measuredangle CND$. Права DE сече праву BC у тачки F, а K је средиште дужи DE. Ако је X тачка пресека кружница описаних око $\triangle ABC$ и $\triangle ADE$ различита од тачке A, доказати да важи $\measuredangle KXF=90^\circ$.

Време за рад 240 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

28. фебруар 2015.

Трећи разред – А категорија

1. Низ $(x_i)_{i=0}^{\infty}$ је дефинисан условима $x_0 = 1$ и $x_{i+1} = x_i + y_i - 1$, где је y_i најмањи природан број који не дели x_i. Да ли важи $x_n = 20!$ за неки природан број n?

2. Дат је конвексан петоугао $ABCDE$ такав да су му углови код темена C и E прави и важи $\measuredangle EDA = \measuredangle CDB$. Нека је N подножје висине из темена D у оштроуглом $\triangle ABD$, и нека је M средиште дужи AB. Доказати да су тачке C, M, N и E концикличне.

3. Нека је n фиксиран природан број. Нека је k било који природан број не већи од n и нека је S скуп неких k различитих простих бројева. Марија и Марко играју наизменично следећу игру. Свако од њих бира један природан број већи од 1 чији сви прости делиоци припадају скупу S и који није дељив ниједним од претходно изабраних бројева. Марија игра прва, а губи онај ко не може да повуче потез. Доказати да Марија има победничку стратегију за бар $\frac{2}{3}n$ могућих вредности параметра k.

4. Ученици трећег разреда су за домаћи имали следећи задатак:

> Одабрати позитивне реалне бројеве a и b и скицирати (у истом координатном систему) графике функција $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ дефинисане са $f(x) = a^x + b$ и $g(x) = b^x + a$.

При прегледу домаћег задатка, дошавши до Перице, професор је рекао: „Перице, не знам које си бројеве a и b одабрао, али ниси добро скицирао графике. Наиме, није могуће да графици оваквих функција имају тачно две заједничке тачке.“ Да ли је професор у праву?

Време за рад 240 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

28. фебруар 2015.

Четврти разред – А категорија

1. Колико најмање различитих комплексних нула може имати полином

$$P(x) = ax^n + x^{2014} + 1,$$

ако је a реалан број а n природан број различит од 2014?

2. Доказати да за сваки природан број n постоји n-тоцифрен природан број чије цифре су из скупа $\{1, 2, 3\}$ и који је дељив збиром својих цифара.

3. Нека је, у $\triangle ABC$, B_1 средиште странице AC, B_0 подножје висине из темена B, а B_2 осносиметрична слика темена B у односу на симетралу $\measuredangle A$. Нека су P и Q тачке додира уписане и споља приписане кружнице са страницом BC, и нека је k кружница над пречником PQ. Тангента t из тачке B_2 додирује кружницу k у тачки T. Доказати да кружница описана око $\triangle B_0B_1T$ додирује праву t.

4. Дато је $2n$ тачака у равни међу којима никоје три нису колинеарне. Посматрајмо све могуће одабире од по $2n$ дужи чији су крајеви у датим тачкама (свака тачка је крај тачно једне од тих дужи) и међу којима се никоје две не секу. Доказати да је број таквих одабира бар 2^{n-1}, и одредити за које се све природне бројеве n може достићи једнакост за бар једну почетну конфигурацију од $2n$ тачака.

Време за рад 240 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

28. фебруар 2015.

Први разред – Б категорија

1. Одредити најмањи природан број који има тачно 2015 делилаца.

2. Дата је кружница k, њен пречник AB и тачка C на дужи AB различита од тачака A и B. Тачке X и Y припадају кружници k и симетричне су у односу на AB, при чему још важи $CY \perp AX$. Доказати да је четвороугао $BYCX$ ромб.

3. Вештак на суду треба да из гомиле од 14 новчића издвоји 7 лажних (њему је познато који новчићи су лажни а који прави). Суду је познато да су лажни новчићи лакши од правих и да их има тачно 7, као и то да су сви лажни новчићи међусобно исте тежине и сви прави новчићи међусобно исте тежине. Вештак на располагању има вагу без тегова за извођење својих доказа пред судом. Доказати да у највише 3 мерења вештак може суду да докаже који су новчићи лажни.

4. На колико се начина могу обојити темена петоугла $ABCDE$ помоћу четири боје ако суседна темена не могу бити исте боје?

5. Ако је полином
$$ax^5 + bx^4 + bx^3 + ax^2 + cx - 62$$
дељив полиномом
$$2x^2 - 5x + 2,$$
израчунати $3a + 2b$.

Време за рад 240 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

28. фебруар 2015.

Други разред – Б категорија

1. Одредити све природне бројеве n такве да је

$$\sqrt{n+2015}-\sqrt{n}$$

рационалан број.

2. Унутар квадрата $ABCD$ дата је тачка M за коју важи $\measuredangle MBD = \measuredangle MDC = 28^\circ$. Израчунати $\measuredangle MAD$.

3. Краљица Амазонки Гоба је имала 5 ћерки; 6 од њених женских потомака су имале по 4 ћерке свака, 11 од њених женских потомака су имале по 2 ћерке свака, а преостале нису имале деце. Ако је познато да краљица Гоба није имала мушких потомака, колико је укупно женских потомака имала ова краљица?

4. За које вредности реалног параметра a је скуп решења неједначине

$$x^2 - a(1+a^2)x + a^4 < 0$$

подскуп интервала $(-3,-1)$? (Празан скуп је подскуп било ког скупа.)

5. Нека су a, b и c комплексни бројеви јединичног модула такви да важи $a+b+c=1$. Доказати да је бар један од бројева a, b или c једнак 1.

Време за рад 240 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

28. фебруар 2015.

Трећи разред – Б категорија

1. У скупу природних бројева решити једначину
$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{2}{101}.$$

2. Перица има j јабука и k корпи које су распоређене за округлим столом. За које вредности j и k Перица може распоредити јабуке у корпе на такав начин да се за сваке две суседне корпе бројеви јабука у њима разликују тачно за 1?

3. Доказати једнакост
$$16\sin^4 10^\circ+8\sin^3 10^\circ-12\sin^2 10^\circ-4\sin 10^\circ+1=0.$$

4. Позитивни бројеви x и y задовољавају неједнакост
$$\frac{x^2+y^2}{x+2y}\leqslant 2.$$
Доказати да тада важи
$$\frac{x}{2}+y\leqslant 5.$$

5. На раван сто постављене су четири лопте при чему се сваке две додирују. Полупречници три од те четири лопте износе 2, 3 и 6. Израчунати полупречник четврте лопте.

Време за рад 240 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

28. фебруар 2015.

Четврти разред – Б категорија

1. Пет различитих целих бројева a, b, c, d и e задовољавају једнакост

$$(3-a)(3-b)(3-c)(3-d)(3-e) = 12.$$

Израчунати $a+b+c+d+e$.

2. Одредити колико има n-торки $(x_1, x_2, ..., x_n)$ код којих је свака координата из скупа $\{0, 1, 2\}$ и притом је збир $x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ паран.

3. Одредити све могуће вредности параметра $a \in \mathbb{R}$ такве да све нуле полинома

$$P(x) = x^4 + ax^2 + a^2x - 1$$

имају међусобно једнаке модуле.

4. У конвексном четвороуглу $ABCD$ важи $AD = 2$, $\measuredangle ABD = \measuredangle ACD = 90^\circ$ и растојање између центара уписаних кружница у $\triangle ABD$ и $\triangle ACD$ износи $\sqrt{2}$. Наћи дужину странице BC.

5. Наћи најмању и највећу вредност израза

$$(x-y)^2 + xy,$$

уз услов

$$x^2 + y^2 = 4.$$

Време за рад 240 минута.
Решења задатака детаљно образложити.