Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

09.02.2013.

Први разред – А категорија

1. Дате су две кружнице које се не секу. Конструисати њихове заједничке тангенте.

2. На једном одбојкашком турниру учествовало је $n > 1$ екипа и сваке две екипе одиграле су тачно један међусобни меч. Доказати да је тимове могуће нумерисати бројевима $1, 2, \ldots, n$ тако да је тим нумерисан бројем i победио у међусобном дуелу тим нумерисан бројем $i+1$, за свако $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$.
(У одбојци нема нерешених резултата.)

3. У скупу природних бројева решити једначину

$$x! + 76 = y^2.$$

4. Подударне кружнице k_1, k_2 и k садрже тачку P, и секу се још у тачкама: k и k_1 у A, k и k_2 у B, k_1 и k_2 у N. Кружнице k_A, са центром у A, и k_B, са центром у B, садрже тачку N. Доказати да кружнице k_A, k_B и k имају заједничку тачку.

5. Нека је $n \geqslant 2$ природан број. Поља квадратне таблице A формата $n \times n$ попуњена су бројевима 1 и -1. За свако $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ означимо са k_i, односно v_i, производ бројева у i–тој колони, односно i–тој врсти. Таблица се зове *савршена* ако је

$$k_1 + k_2 + \ldots + k_n + v_1 + v_2 + \ldots + v_n = 0.$$

Одредити све природне бројеве $n \geqslant 2$ за које постоји савршена таблица.

Време за рад 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

09.02.2013.

Други разред – А категорија

1. Доказати да не постоји $x \in \mathbb{R}$ тако да важи

$$\operatorname{tg} 2x \cdot \operatorname{ctg} 3x \in \left(\frac{2}{3}, 9\right).$$

2. Нека су m_a, m_b, m_c тежишне дужи и r_a, r_b, r_c полупречници одговарајућих споља приписаних кругова произвољног троугла ABC. Доказати да важи неједнакост

$$\frac{1}{m_a^2} + \frac{1}{m_b^2} + \frac{1}{m_c^2} \leqslant \frac{1}{r_a^2} + \frac{1}{r_b^2} + \frac{1}{r_c^2}.$$

3. Да ли постоји природан број n тако да за сваку уређену петорку целих бројева $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ важи импликација

$$x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4 = n \cdot x_5^4 \quad \Longrightarrow \quad x_1 = 0?$$

4. Дат је оштроугли троугао ABC. Нека су P и Q тачке на страницама AB и AC, редом, такве да праве PQ и BC нису паралелне. Означимо са M и N средишта дужи BP и CQ, редом. Доказати да кружнице описане око $\triangle ABC$, $\triangle APQ$ и $\triangle AMN$ осим тачке A имају још једну заједничку тачку.

5. На неком скупу коме присуствује $n > 1$ људи учесници говоре на укупно $n-1$ различитих језика, при чему сваки учесник говори све језике. За које n је могуће да сваки учесник приликом поздрављања са осталим учесницима употреби свих $n-1$ језика? (Свака два учесника се поздрављају на тачно једном језику.)

Време за рад 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

09.02.2013.

Трећи разред – А категорија

1. Нека је $n \in \mathbb{N}$. Да ли постоји реалан број c такав да за свако $x \in \mathbb{R}$ важи

$$\sin^{2n} x + c \cdot \sin^2 x \cdot \cos^2 x + \cos^{2n} x = 1\,?$$

2. Да ли постоји матрица A, чији су елементи комплексни бројеви, таква да за неке природне бројеве k и n важи

$$A^k = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \text{ и } A^n = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}?$$

3. Одредити све природне бројеве n за које постоји делилац d броја n^4+1 такав да је $n^2 < d \leqslant n^2+3n+7$.

4. Нека је ABC једнакокраки троугао ($AB = AC$) и нека је D тачка на страници BC таква да су полупречници круга уписаног у троугао ABD и круга приписаног страници CD троугла ACD једнаки. Доказати да су ови полупречници једнаки четвртини висине троугла ABC из темена B.

5. Нека су n и k природни бројеви и $S = \{1, 2, \ldots, n\}$. Одредити број уређених k–торки $(A_1, A_2, \ldots, A_k)$ подскупова скупа S чија је унија једнака S.

Време за рад 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

09.02.2013.

Четврти разред – А категорија

1. Монични полином $p(x)$ степена $m+n$ има m–тоструку нулу a и n–тоструку нулу b, при чему је n паран и важи $a < b$. Доказати да у тачки
$$c = \frac{mb+na}{m+n}$$
функција $p(x)$ има локални максимум.
(Полином је моничан ако му је коефицијент уз моном највећег степена једнак 1.)

2. Бинарна операција $*$ дефинисана на скупу реалних бројева је таква да за све $a, b, c \in \mathbb{R}$ важи
$$(a * b) * c = a + b + c.$$
Доказати да је $a * b = a + b$.

3. Нека је x природан број. Доказати да се $x-1$ и $x+1$ могу представити у облику збира два квадрата целих бројева ако и само ако постоје цели бројеви u и v такви да је $u+v=2x$ и $uv-1$ потпун квадрат.

4. Нека су KL и MN тангенте на уписани круг ромба $ABCD$, где су K, L, M, N тачке на страницама AB, BC, CD, DA, редом. Доказати да је $KN \parallel LM$.

5. На колико начина се n нула и m јединица могу поређати у низ тако да се на тачно k места може уочити пар различитих суседних бројева?

Време за рад 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

09.02.2013.

Први разред – Б категорија

1. Нека је O пресек дијагонала трапеза $ABCD$ код кога је $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{DC}$ и тачка M средиште странице AB. Ако је $\overrightarrow{BC} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{DC} = \vec{b}$, изразити векторе $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{MD}$, $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OM}$ преко $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

2. Функција $f : \mathbb{R} \setminus \{0,1\} \to \mathbb{R}$ дата је са

$$f(x) = \frac{(x^2 - x + 1)^3}{x^2(x-1)^2}.$$

Доказати да је $f(x) = f(1-x) = f(1/x)$, за све $x \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$.

3. Доказати да не постоје природни бројеви a, b, c, d такви да је

$$9^a + 2^b + 2013^c = 2014^d.$$

4. У троуглу ABC, са најкраћом страницом BC, изабране су тачке P и Q на страницама AB и AC, редом, тако да је

$$\sphericalangle PCB = \sphericalangle QBC = \sphericalangle BAC.$$

Доказати да центар O описане кружнице троугла APQ лежи на симетрали странице BC.

5. Колико има четвороцифрених бројева који садрже бар две цифре 5?

Време за рад 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

09.02.2013.

Други разред – Б категорија

1. Одредити комплексан број z за који важи

$$|z-1| = |z-3-2i| \qquad \text{и} \qquad |z| = |z-4|.$$

2. Парабола $y = ax^2 + bx + c$ сече y-осу у тачки $(0, 8)$, док је њена једина заједничка тачка са x-осом тачка $(2, 0)$. Колико целобројних тачака (m, n), таквих да је $-2012 \leqslant m \leqslant 2012$ и $-2012 \leqslant n \leqslant 2012$, лежи на овој параболи?

3. Нека је $n \geqslant 10$ природан број. Од њега добијамо број m тако што цифре броја n напишемо у обрнутом редоследу (уколико се n завршава нулама, њих не пишемо у броју m), а затим број p као $p = |n - m|$. Нека је p_1 збир цифара броја p. Затим, нека је p_2 збир цифара броја p_1, итд. На овај начин добијен је једноцифрен број p_k, за неко $k \geqslant 1$. Одредити p_k.

4. Доказати да је у сваком конвексном четвороуглу збир дијагонала већи од полуобима, а мањи од обима.

5. Аца, Бане и Влада припадају породицама Лажетића и Истинољубића (свако припада само једној од те две породице). Као што им и презимена говоре сваки Лажетић увек лаже, а сваки Истинољубић увек говори истину. Аца је рекао следеће:

„Или Бане или ја припадамо различитој породици од остале двојице.”

а) У којим случајевима је претходни исказ тачан?

б) Чије презиме са сигурношћу можемо да утврдимо?

Време за рад 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

09.02.2013.

Трећи разред – Б категорија

1. Нека су $\vec{m}$, $\vec{n}$, $\vec{p}$ вектори такви да је $|\vec{m}| = 2$, $|\vec{n}| = 3$, $|\vec{p}| = 2$, $\sphericalangle(\vec{m},\vec{n}) = \sphericalangle(\vec{n},\vec{p}) = \pi/3$, $\sphericalangle(\vec{m},\vec{p}) = \pi/2$. Ако је

$$\vec{a} = 3\vec{m} + 2\vec{n} - \vec{p}, \qquad \vec{b} = \vec{m} - \vec{n} + 2\vec{p},$$

одредити $|\vec{a}|$ и $|\vec{b}|$.
(Са $\sphericalangle(\vec{u},\vec{v})$ означен је угао између вектора $\vec{u}$ и $\vec{v}$.)

2. Доказати да не постоји $x \in \mathbb{R}$ тако да важи

$$\operatorname{tg} 2x \cdot \operatorname{ctg} 3x \in \left(\frac{2}{3}, 9\right).$$

3. У скупу природних бројева решити једначину

$$x! + 76 = y^2.$$

(Са $x!$ означен је број $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot x$)

4. Доказати да произвољну тространу пирамиду можемо пресећи равни тако да се у пресеку добије ромб.

5. На контролној вежби сваки ученик добио је задатке једне од две групе задатака. Уколико одељење има 20 ученика, а по 10 ученика ради сваку групу задатака, на колико начина их дежурни наставник може поређати у два реда тако да ученици који су добили исту групу задатака седе један иза другог, а да ученици који седе један до другог раде различите групе задатака?

Време за рад 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

09.02.2013.

Четврти разред – Б категорија

1. Одредити димензије праве кутије без поклопца са квадратном основом и запремином V за чије прављење је потребна минимална количина материјала.

2. Нека је $a \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$. У скупу реалних бројева решити једначину

$$\frac{(x^2-x+1)^3}{x^2(x-1)^2} = \frac{(a^2-a+1)^3}{a^2(a-1)^2}.$$

3. У скупу реалних бројева решити једначину

$$\left\lfloor x+\frac{1}{6}\right\rfloor + \left\lfloor x+\frac{3}{6}\right\rfloor + \left\lfloor x+\frac{5}{6}\right\rfloor = \lfloor x\rfloor + \left\lfloor x+\frac{2}{6}\right\rfloor + \left\lfloor x+\frac{4}{6}\right\rfloor.$$

($\lfloor x\rfloor$ је цео део броја x, односно највећи цео број не већи од x.)

4. Пресек паралелопипеда и равни је петоугао код кога су све странице дужине 1 или 2. Одредити углове тог петоугла.

5. Колико има функција $f : \{a,b,c,d\} \to \{a,b,c,d\}$ које нису бијекције и нису константне функције?

Време за рад 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.