Test broj 1

1. a) Izračunati $\left(\left(\frac{1}{5}+\frac{3}{4}:\frac{9}{5}\right):1\frac{7}{30}\right)^{-2}+log_2 0{,}0625.$

b) Uprostiti $\frac{x}{x^2+y^2}-\frac{y(x-y)^2}{x^4-y^4}.$

2. Rešiti jednačine:

a) $\frac{2x+1}{5}-\frac{x+2}{4}=\frac{5x+2}{3}-2x,$

b) $(f(x))^2+f(x)=0,$ ako je $f(x)=\begin{cases} x+1, & x<2 \\ x-1, & x\geq 2. \end{cases}$

3. Rešiti trigonometrijsku jedančinu $cos^2 x-3sin\,x\,cos\,x=-1.$

4. Rešiti nejednačinu $x^{log_2^2 x-3log_2 x+1}<8.$

5. Naći jednačine zajedničkih tangenti parabole $y^2=8x$ i kružnice $x^2+y^2=2.$

6. Izračunati obim i površinu jednakokrakog trapeza opisanog oko kruga ako je dužina veće osnovice $3cm$, a jedan njegov unutraši ugao je $60°$.

7. Površina prave kupe je $96\pi\ cm^2$, a dužina izvodnice je $10cm$. Izračunati zapreminu kupe.

8. Zbir svih članove beskonačne geometrijske progresije je 16, a zbir kvadrata članova te iste progresije je 153,6. Na}i peti član i količnik te progresije.

9. Izračunati $cos\,20°\cdot cos\,40°\cdot cos\,60°\cdot cos\,80°.$

10. Od 5 oficira, 4 podoficira i 10 vojnika treba formirati grupu od 4 osobe u kojoj će biti bar po jedan oficir i podoficir. Na koliko načina je to moguće učiniti?

1.a) $\left(\left(\frac{1}{5}+\frac{3}{4}:\frac{9}{5}\right):1\frac{7}{30}\right)^{-2}+log_2 0{,}0625=$

$$=\left(\left(\frac{1}{5}+\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{9}\right)\cdot\frac{30}{37}\right)^{-2}+log_2\left(0{,}25\right)^2=\left(\frac{12+25}{60}\cdot\frac{30}{37}\right)^{-2}+2\cdot log_2 0{,}5^2=$$

$$=\left(\frac{37}{60}\cdot\frac{30}{37}\right)^{-2}+2\cdot 2\cdot log_2 2^{-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}+4\left(-1\right)=4-4=0.$$

b) $\frac{x}{x^2+y^2}-\frac{y\left(x-y\right)^2}{x^4-y^4}=\frac{x}{x^2+y^2}-\frac{y\left(x-y\right)^2}{\left(x^2-y^2\right)\left(x^2+y^2\right)}=$

$$=\frac{x}{x^2+y^2}-\frac{y\ \left(x-y\right)}{\left(x+y\right)\left(x^2+y^2\right)}=$$

$$=\frac{x\left(x+y\right)-y\left(x-y\right)}{\left(x^2+y^2\right)\left(x+y\right)}=\frac{x^2+xy-xy+y^2}{\left(x^2+y^2\right)\left(x+y\right)}=\frac{1}{x+y},$$

uz uslov $x\neq -y\wedge x\neq y$.

2.a) Ako se data jednačina pomnoži sa $NZS\left(3,4,5\right)$, tj. sa 60, dobija se:

$$\frac{2x+1}{5}-\frac{x+2}{4}=\frac{5x+2}{3}-2x\Leftrightarrow 12\left(2x+1\right)-15\left(x+2\right)=20\left(5x+2\right)-120x$$

$$\Leftrightarrow 9x-18=-20x+40$$

$$\Leftrightarrow x=2.$$

b) Ako je $x<2$, jednačina glasi $\left(x+1\right)^2+\left(x+1\right)=0$. Tada je

$$\left(x+1\right)^2+\left(x+1\right)=0\wedge x<2\Leftrightarrow x^2+3x+1=0\wedge x<2$$

$$\Leftrightarrow\left(x=-1\vee x=-2\right)\wedge x<2$$

$$\Leftrightarrow x=-1\vee x=-2.$$

Ako je $x\geq 2$, jednačina glasi $\left(x-1\right)^2+x-1=0$. Tada je

$$\left(x-1\right)^2+\left(x-1\right)=0\wedge x\geq 2\Leftrightarrow x^2-x=0\wedge x\geq 2$$

$$\Leftrightarrow\left(x=0\vee x=1\right)\wedge x\geq 2$$

$$\Leftrightarrow x\in\varnothing$$.(jednačina nema rešenja)

Rešenja jednačine su $x=-1$ ili $x=-2$.

3. Za $cos\, x = 0$ ili $sin\, x = 0$, tj. za $x = k \cdot \frac{\pi}{2}, k \in Z$ jednačina je nemoguća.

Dalje, data jednačina je ekvivalentna sa:

$$cos^2 x - 3 sin\, x\, cos\, x = -1$$

$$\Leftrightarrow cos^2 x + 1 - 3\, sin\, x\, cos\, x = 0$$

$$\Leftrightarrow cos^2 x + sin^2 x + cos^2 x - 3 sin\, x\, cos\, x = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 cos^2 x + sin^2 x - 3 sin\, x\, cos\, x = 0$$

$$\left(\text{дељењем са } cos^2 x \neq 0\right)$$

$$\Leftrightarrow 2 + tg^2 x - 3tgx = 0$$

$$\Leftrightarrow tgx = t \wedge t^2 - 3t + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow tgx = t \wedge \left(t = 2 \vee t = 1\right)$$

$$\Leftrightarrow tgx = 2 \vee tgx = 1$$

$$\Leftrightarrow x = arctg\, 2 + k\pi,\ k \in Z \vee x = \frac{\pi}{4} + l\pi,\ l \in Z.$$

4. Nejednačina $x^{log_2^2 x - 3 log_2 x + 1} < 8$ ima smisla za $x > 0$. Ako uvedemo smenu $log_2 x = t$, onda je $x = 2^t$, pa dobijamo:

$$\left(2^t\right)^{t^2 - 3t + 1} < 8$$

$$\Leftrightarrow 2^{t^3 - 3t^2 + t} < 2^3$$

$$\Leftrightarrow t^3 - 3t^2 + t < 3$$

$$\Leftrightarrow t^3 - 3t^2 + t - 3 < 0$$

$$\Leftrightarrow t^2 \left(t - 3\right) + \left(t - 3\right) < 0$$

$$\Leftrightarrow \left(t - 3\right) \cdot \left(t^2 + 1\right) < 0$$

$$\Leftrightarrow t < 3.$$

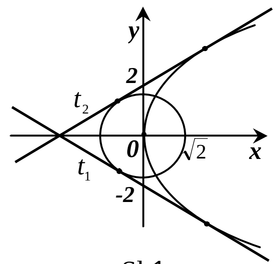
Prema tome, $log_2 x < 3$, tj. $log_2 x < log_2 2^3$, odakle sledi da je $x < 8$ i, kako je $x > 0$, skup rešenja nejednačine je interval $(0,8)$.

5. Uslov dodira prave $y = kx + n$ i kružnice $x^2 + y^2 = r^2$ je $(1 + k^2)r^2 = n^2$. Uslov dodira prave $y = kx + n$ i parabole $y^2 = 2px$ je $p = 2kn$. Kako je $r^2 = 2$ i $p = 4$, rešavanjem sistema $\left.\begin{array}{c}(1+k^2)\cdot 2 = n^2\\ 4 = 2kn\end{array}\right\}$ dobija se da je

$n = 2$ i $k = 1$ ili $n = -2$ i $k = -1$. Prema tome, jednačine traženih zajedničkih tangenti su:

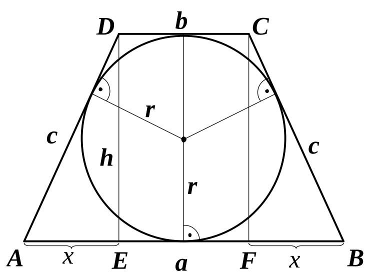
$t_1\colon y = x + 2$

$t_2\colon y = -x - 2.$



Sl.1

6.



Sl.2

Neka je E podnožje visine h iz temena D (sl. 2). Tada je

$$AE = \cancel{x} \quad c \cdot cos\,60° = \frac{c}{2}.$$

Trapez je jednakokraki, pa je $x = \frac{a-b}{2}$, odnosno $\frac{c}{2} = \frac{a-b}{2}$, a kako je trapez tangentni, to je $2c = a + b$.

Dakle, $2c = a + b$, $\frac{c}{2} = \frac{a-b}{2}$ i $a = 3$, odakle je

$$\left.\begin{array}{r}2c = 3 + b\\ c = 3 - b\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r}6 - 2b = 3 + b\\ c = 3 - b\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r}3 = 3b\\ c = 3 - b\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r}b = 1\\ c = 2\end{array}\right\}.$$

Visinu h dobijamo iz pravouglog trougla AED : $h = c \cdot \sin 60° = \frac{c\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$. To znači da je obim trapeza

$O = 2c + a + b = 2 \cdot 2 + 3 + 1 = 8\,cm$, a površina trapeza

$$P = \frac{a+b}{2} \cdot h = \frac{3+1}{2} \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{3}\,cm^2 .$$

7. Na osnovu formule za površinu kupe

$P = B + M = \pi r^2 + \pi r s$ dobijamo da je

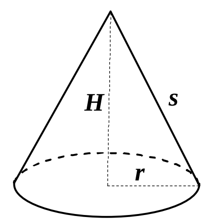
$96\pi = \pi\, r\left(r + 10\right)$, odnosno, da je

$r^2 + 10r - 96 = 0$ i $r = 6cm$.

Kako je $H^2 = s^2 - r^2$, to je $H = 8cm$.

Zapreminu kupe izračunavamo po formuli

$V = \frac{1}{3} B \cdot H$, pa je $V = \frac{1}{3}\pi \cdot 6^2 \cdot 8$, tj. $V = 96\pi\ cm^3$.



Sl.3

8. Prema uslovu zadatka je $a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \ldots = 16$ i $|q| < 1$, jer progresija ima sumu. Kvadrati članova geometrijske progresije obrazuju, takodje, geometrijsku progresiju sa količnikom q^2, $0 < q^2 < 1$ i prvim članom $a_1^{\ 2}$ za koju je $a_1^2 + a_1^2 q^2 + a_1^2 q^4 + \ldots = 153{,}6$. Zbir svih članova progresije izračunava se po formuli $S_\infty = \frac{a_1}{1-q}$, pa iz $\frac{a_1}{1-q} = 16$ и $\frac{a_1^{\ 2}}{1-q^2} = 153{,}6$ sledi:

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= 16(1-q) \\ \frac{256(1-q)^2}{1-q^2} &= 153{,}6 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} a_1 &= 16(1-q) \\ 256(1-q) &= 153{,}6(1+q) \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} a_1 &= 16(1-q) \\ 102{,}4 &= 409{,}6q \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} a_1 &= 12 \\ q &= \frac{1}{4} \end{aligned}\right\}.$$

Dakle, $q = \frac{1}{4}$ i $a_5 = a_1 \cdot q^4 = 12 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^4 = \frac{12}{256} = \frac{3}{64}$.

9. Znajući da je $\cos\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{2\sin\alpha}$ i $\sin\left(180° - \alpha\right) = \sin\alpha$, dobijamo da je

$\cos 20° \cdot \cos 40° \cdot \cos 60° \cdot \cos 80°$

$$=\frac{sin\,40°}{2\,sin\,20°}\cdot\frac{sin\,80°}{2\,sin\,40°}\cdot\frac{sin\,120°}{2\,sin\,60°}\cdot\frac{sin\,160°}{2\,sin\,80°}=$$

$$=\frac{1}{16}\cdot\frac{sin\,120^\circ}{sin\,60^\circ}\cdot\frac{sin\,160^\circ}{sin\,20^\circ}=\frac{1}{16}\cdot\frac{sin\left(180^\circ-60^\circ\right)}{sin\,60^\circ}\cdot\frac{sin\left(180^\circ-20^\circ\right)}{sin\,20^\circ}=\frac{1}{16}.$$

10. Moguće sastave grupa prikažimo pomoću skupova (jer redosled nije bitan):

$$\{O,O,O,P\},\{O,O,P,P\},\{O,P,P,P\},\{O,P,V,V\},\{O,P,P,V\},\{O,O,P,V\},$$

gde O označava oficira, P podoficira i V vojnika.

Od 5 oficira možemo izabrati 3 oficira na $\binom{5}{3}=\frac{5\cdot4\cdot3}{1\cdot2\cdot3}=10$ načina. Četvrti član grupe mora biti podoficir, za čiji izbor imamo $\binom{4}{1}=\frac{4}{1}=4$ mogućnosti. Svakom izboru tri oficira od pet oficira odgovaraju četiri izbora podoficira, pa za ovu kombinaciju imamo $10\cdot4=40$ moguća načina formiranja grupe.. Slično rasudjivanje primenjuje se i u ostalim slučajevima. Ukupan broj traženih načina je

$$\binom{5}{3}\cdot\binom{4}{1}+\binom{5}{2}\cdot\binom{4}{2}+\binom{5}{1}\cdot\binom{4}{3}+\binom{5}{1}\cdot\binom{4}{1}\cdot\binom{10}{2}+\binom{5}{1}\cdot\binom{4}{2}\cdot\binom{10}{1}+$$

$$+\binom{5}{2}\cdot\binom{4}{1}\cdot\binom{10}{1}=40+60+20+900+300+400=1720.$$

Test broj 2

1. a) Izračunati $\left(\dfrac{15}{\sqrt{6}+1}+\dfrac{4}{\sqrt{6}-2}-\dfrac{12}{3-\sqrt{6}}\right):\dfrac{1}{\sqrt{6}+11}$.

   b) Uprostiti $\dfrac{a^2+b^2}{ab}-\dfrac{a^2}{ab-b^2}+\dfrac{b^2}{a^2-ab}$.

2. Rešiti jednačine:

   a) $\dfrac{x-1}{2}+\dfrac{3x-1}{4}=\dfrac{2x-4}{3}+\dfrac{x+1}{6}$, b) $\left(x^2-4x\right)^2+12=7\left(4x-x^2\right)$

3. Rešiti trigonometrijsku jednačinu

$$\cos^6 x+\sin^6 x=\frac{15}{8}\cos 2x-\frac{1}{2}.$$

4. Rešiti nejednačinu $\log_3(3-x)<\log_{\frac{1}{3}}\dfrac{x+1}{4}$.

5. Tačka $A(3,0)$ polovi tetivu kružnice $x^2+y^2-4x+2y+1=0$. Odrediti jednačinu prave kojoj pripada tetiva navedene kružnice.

6. Stranice trougla su $a=13$, $b=14$ i $c=15$. Dve od njih (a i b) su tangente kruga čiji je centar na trećoj stranici. Odrediti poluprečnik kruga.

7. Izvodnica prave zarubljene kupe je $s=5cm$, a poluprečnici osnova su $R=5cm$ i $r=2cm$. U kupu je upisana pravilna zarubjlena četvorostrana piramida tako da je donja osnova piramide upisana u donju osnovu kupe, a gornja osnova piramide u gornju osnovu kupe. Izračunati zapreminu zarubljene piramide.

8. Odrediti dužine stranica trougla ako se zna da one obrazuju aritmetičku progresiju sa razlikom $d=4$ i ako jedan unutračnji ugao trougla ima $120°$.

9. Data je funkcija $f(x)=\begin{cases} x^2-1, & x\in(-1,1) \\ \dfrac{1}{2}\ln x^2, & x\in(-\infty,-1]\cup[1,\infty). \end{cases}$

   a) Skicirati grafik funkcije *f*.

   b) U zavisnosti od realnog parametra *a*, odrediti broj realnih rešenja jednačine $|f(x)|=a$.

10. Izračunati granične vrednosti:

    a) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\log_2 2+\log_2 4+\cdots+\log_2 2^n}{n^2}$, b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2}$.

Rešenja testa broj 2

1. a) $\left(\frac{15}{\sqrt{6}+1}+\frac{4}{\sqrt{6}-2}-\frac{12}{3-\sqrt{6}}\right):\frac{1}{\sqrt{6}+11}=$

$$=\left(\frac{15\cdot\left(\sqrt{6}-1\right)}{6-1}+\frac{4\left(\sqrt{6}+2\right)}{6-4}-\frac{12\left(3+\sqrt{6}\right)}{9-6}\right)\cdot\left(\sqrt{6}+11\right)=$$

$$=\left[3\left(\sqrt{6}-1\right)+2\left(\sqrt{6}+2\right)-4\left(3+\sqrt{6}\right)\right]\cdot\left(\sqrt{6}+11\right)=$$

$$=\left(\sqrt{6}-11\right)\cdot\left(\sqrt{6}+11\right)=6-121=-115.$$

b) $\frac{a^2+b^2}{ab}-\frac{a^2}{ab-b^2}+\frac{b^2}{a^2-ab}=\frac{a^2+b^2}{ab}-\frac{a^2}{b\left(a-b\right)}+\frac{b^2}{a\left(a-b\right)}=$

$$=\frac{\left(a^2+b^2\right)\left(a-b\right)-a^3+b^3}{ab\left(a-b\right)}=\frac{a^3+ab^2-a^2b-b^3-a^3+b^3}{ab\left(a-b\right)}=$$

$$=\frac{ab\left(b-a\right)}{ab\left(a-b\right)}=-1,$$ uz uslov $a\neq 0, b\neq 0$ i $a\neq b$.

2. a) Ako datu jednačinu pomnožimo sa $NZS\left(2,3,4,6\right)$,tj. sa 12, dobijamo:

$$\frac{x-1}{2}+\frac{3x-1}{4}=\frac{2x-4}{3}+\frac{x+1}{6}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6\left(x-1\right)+3\left(3x-1\right)=4\left(2x-4\right)+2\left(x+1\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 15x-9=10x-14\Leftrightarrow 5x=-5\Leftrightarrow x=-1.$$

b) Ako uvedemo smenu $x^2-4x=t$, dobijamo da je

$$\left(x^2-4x\right)^2+12=7\left(4x-x^2\right)\Leftrightarrow x^2-4x=t\wedge t^2+7t+12=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2-4x=t\wedge\left(t=-3\vee t=-4\right)\Leftrightarrow x^2-4x=-3\vee x^2-4x=-4\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2-4x+3=0\vee x^2-4x+4=0\Leftrightarrow x=3\vee x=1\vee x=2.$$

3. Koristeći identitete:

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2),$$
$$a^4-a^2b^2+b^4=(a^2+b^2)^2-3a^2b^2,$$
$$2\sin x\cos x=\sin 2x \text{ i}$$
$$\sin^2 x=1-\cos^2 x,$$
transformišimo levu stranu jednačine na sledeći način:

$$\cos^6 x+\sin^6 x=\left(\cos^2 x\right)^3+\left(\sin^2 x\right)^3=$$
$$=\left(\cos^2 x+\sin^2 x\right)\left(\cos^4 x-\cos^2 x\sin^2 x+\sin^4 x\right)=$$
$$=1\cdot\left[\left(\cos^2 x+\sin^2 x\right)^2-3\cos^2 x\sin^2 x\right]=1-3\cdot\frac{4\sin^2 x\cos^2 x}{4}=$$
$$=1-\frac{3}{4}\sin^2 2x=1-\frac{3}{4}\left(1-\cos^2 2x\right).$$

Data jednačina sada ima oblik $1-\frac{3}{4}\left(1-\cos^2 2x\right)=\frac{15}{8}\cos 2x-\frac{1}{2}$, odakle se sredjivanjem dobija ekvivalentna jednačina, odnosno $2\cos^2 2x-5\cos 2x+2=0$. Uvodjewem smene $\cos 2x=t$ dobija se jednačina $2t^2-5t+2=0$, čija su rešnja $t=2$ ili $t=\frac{1}{2}$. Jednačina $\cos 2x=2$ je nemoguća, a jednačina $\cos 2x=\frac{1}{2}$ ima rešenja $x=\pm\frac{\pi}{6}+2k\pi,\ k\in Z$.

4. Nejednačina $\log_3(3-x)<\log_{\frac{1}{3}}\frac{x+1}{4}$ ima smisla ako je $3-x>0$ i $\frac{x+1}{4}>0$, odnosno ako je $x\in(-1,3)$. Kako je $\log_{\frac{1}{n}}a=-\log_n a$ biće

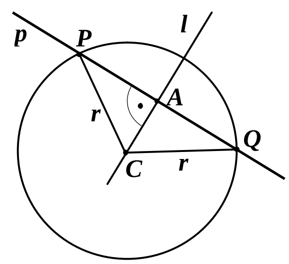
$$\log_{\frac{1}{3}}\frac{x+1}{4}=-\log_3\frac{x+1}{4}=\log_3\left(\frac{x+1}{4}\right)^{-1}=\log_3\frac{4}{x+1}.$$

Osnova logaritma je veća od 1 , pa je logaritamska funkcija rastuća , a nejednačina $\log_3(3-x)<\log_3\frac{4}{x+1}$ se svodi na nejednačinu

$3-x<\dfrac{4}{x+1}$. Odavde dobijamo da je $3-x-\dfrac{4}{x+1}<0$, odnosno $\dfrac{x^2-2x+1}{x+1}>0$ ili $\dfrac{(x-1)^2}{x+1}>0$. Rešenja posledwe nejednačine su svi brojevi veći od -1 i različiti od 1. Ako uzmemo u obzir da je $x\in(-1,3)$, konačno rešenje date nejednačine je $x\in(-1,1)\cup(1,3)$.

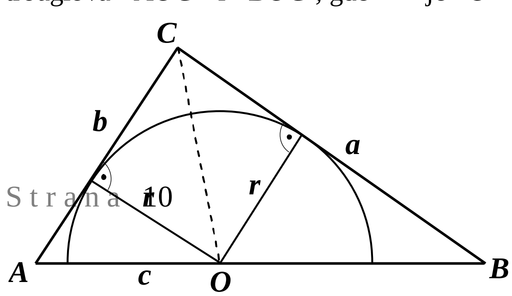
5. Kanonski oblik jednačine kruga je $(x-2)^2+(y+1)^2=4$. Centar kruga je tačka $C(2,-1)$, a poluprečnik je r=2. Jednačina prave *l*, odredjene tačkama A i C, prema formuli $y-y_1=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$, glasi $y-0=\dfrac{-1-0}{2-3}(x-3)$, odnosno $y=x-3$. Prava *l* i prava *p*, kojoj pripada tetiva, su ortogonalne {to sledi iz podudarnosti trouglova PAC i QAC (sl. 4).

Koeficijent pravca prave *l* je k_l=1, a prave *p* je k_p. Iz uslova ortogonalnosti pravih $k_{p}\cdot k_l=-1$ sledi da je $k_p=-1$. Jednačina prave *p* kojoj pripada tačka $A(3,0)$, sa koeficijentom pravca $k_p=-1$ je $y-0=-1\cdot(x-3)$, odnosno $y=-x+3$.



Sl.4

6. Kako su poznate sve tri stranice trougla, njegovu površinu možemo izračunati pomoću Heronovog obrasca $P=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, pri čemu je $s=\dfrac{a+b+c}{2}$ poluobim trougla čije su stranice a, b i c. U ovom zadatku je $s=21$, pa je $P_{ABC}=\sqrt{21(21-13)(21-14)(21-15)}=84$. Na osnovu uslova zadatka , površinu trougla ABC možemo dobiti i kao zbir površina trouglova AOC i BOC, gde je O centar upisanog polukruga(sl.5). Dakle, $P_{ABC}=P_{AOC}+P_{BOC}$, odnosno $P_{ABC}=\dfrac{br}{2}+\dfrac{ar}{2}$,

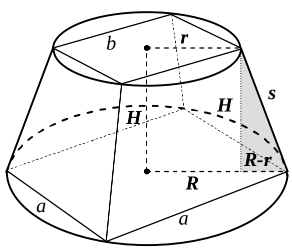


Sl.5

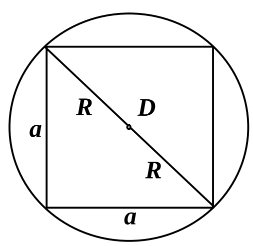
odakle je $\frac{r}{2}(13+14)=84$,

pa je $r=\frac{56}{9}$.

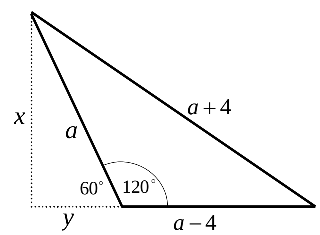
7. Na osnovu Pitagorine teoreme (sl. 6) dobijamo da je $H^2=s^2-(R-r)^2$, tj. $H=4$. Prečnik donje osnove zarubljene kupe je $2R$, a kako je i dijagonala D donje osnove upisane zarubljene piramide takodje jednaka $2R$ (sl. 7), to će biti $D=2R=10=a\sqrt{2}$, pa je $a=5\sqrt{2}$. Slično se iz $d=2r=4=b\sqrt{2}$ dobija da je $b=2\sqrt{2}$.
Površine baza zarubljene piramide su :
$B_1=a^2=50cm^2$ i $B_2=b^2=8cm^2$, pa je zapremina zarubljene piramide $V=\frac{H}{3}\left(B_1+\sqrt{B_1B_2}+B_2\right)=\frac{4}{3}\left(50+\sqrt{50\cdot 8}+8\right)=104cm^3$.



Sl.6



Sl.7

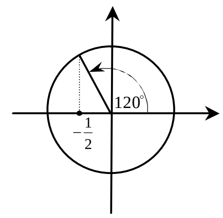


Sl.8

8. Neka su stranice trougla $a, b=a-4$ i $c=a+4$. Sa slike 8 vidi se da je $x=\frac{a\sqrt{3}}{2}$ i $y=\frac{a}{2}$. Prema Pitagorinoj teorimi je $x^2+(y+a-4)^2=(a+4)^2$, pa je $\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{2}+a-4\right)^2=(a+4)^2$,

odakle se sredjivanjem dobija jednačina $2a^2-20a=0$, čija su rešenja $a=0$ ili $a=10$. Dakle, stranice trougla su $a=10$, $b=6$ i $c=14$.

Do jednačine $2a^2-20a=0$ smo mogli doći i na drugi način. Na osnovu kosinusne teoreme važi (sl. 9): $(a+4)^2=a^2+(a-4)^2-2a(a-4)\cos 120^\circ$. Kako je $cos 120^\circ=-\dfrac{1}{2}$ (sl. 6), sredjivanjem prethodne jednačine dobija se jednačina $2a^2-20a=0$.



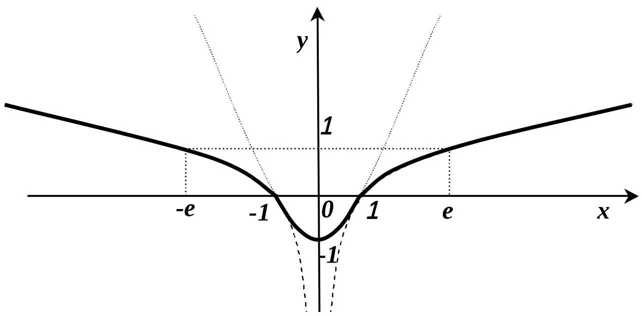
Sl. 9

9. Kako je $\dfrac{1}{2}ln\, x^2=ln\left(x^2\right)^{\frac{1}{2}}=ln\sqrt{x^2}=ln|x|$ i $|x|=\begin{cases} x, & x\ge 0 \\ -x, & x<0 \end{cases}$,

funkcija f bi}e zadata formulom

$$f(x)=\begin{cases} ln(-x), & x\le -1 \\ x^2-1, & x\in(-1,1) \\ ln\, x, & x\ge 1 \end{cases}.$$

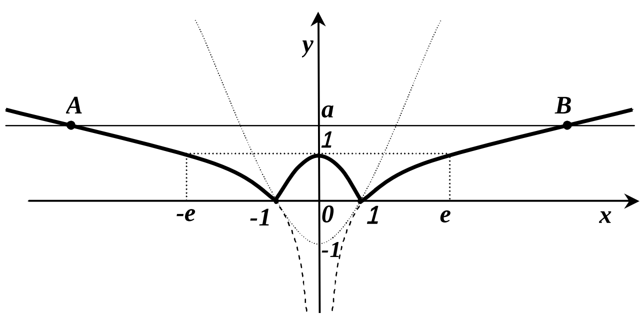
Grafik funkcije f je prikazan na slici 10.



Sl. 10

U istom koordinatnom sistemu, na slici 11, predstavljeni su grafici funkcija

$$g(x) = a,\ a \in R \quad \text{i} \quad |f(x)| = \begin{cases} ln(-x), & x \le -1 \\ -(x^2-1), & x \in (-1,1) \\ ln\, x, & x \ge 1 \end{cases}.$$



Sl. 11

Apscise zajedničkih tačaka grafika funkcija $|f|$ i g predstavljaće rešenja date jednačine. Na slici 8 to su tačke A i B. To znači, za $a < 0$ jednačina nema rešenja, za $a \in (1,\infty) \cup \{0\}$ ima 2 rešenja, za $a=1$ jednačina ima 3 rešenja, za $a \in (0,1)$ jednačina ima 4 rešenja.

10. a) $$\lim_{n\to\infty} \frac{log_2 2 + log_2 4 + \ldots + log_2 2^n}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{log_2 \left(2\cdot 4\cdot 8\cdot \ldots .2^n\right)}{n^2} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{log_2\left(2^{1+2+\ldots+n}\right)}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{(1+2+\ldots+n)\, log_2 2}{n^2} =$$

$$= \lim_{n\leftarrow\infty} \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n}{2n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{2} = \frac{1}{2}.$$

b) $$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2} \cdot \frac{\sqrt[3]{\left(x^2+1\right)^2}+\sqrt[3]{x^2+1}+1}{\sqrt[3]{\left(x^2+1\right)^2}+\sqrt[3]{x^2+1}+1} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\sqrt[3]{x^2+1}\right)^3 - 1^3}{x^2\left(\sqrt[3]{\left(x^2+1\right)^2}+\sqrt[3]{x^2+1}+1\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2\left(\sqrt[3]{\left(x^2+1\right)^2}+\sqrt[3]{x^2+1}+1\right)} = \frac{1}{3}$$

1\. a) Šta je veće: 13% od 200 ili 30% od 90?

b) Uprostiti izraz $\frac{a^{-2}+b^{-2}}{a^{-1}+b^{-1}}\cdot\left(\frac{a^2+b^2}{ab}\right)^{-1}:\frac{a^{-1}-b^{-1}}{a^2-b^2}$.

2\. Rešiti jednačine:

a) $x-\frac{1+\frac{3}{4}x}{4}+\frac{5-\frac{2}{3}x}{4}=\frac{3-\frac{x}{2}}{3}$;   b) $log_{\frac{1}{3}}\left(x^2+2|x|\right)\quad -1$.

3\. Dokazati identitet $3+4cos2\alpha+cos4\alpha=8cos^4\alpha$.

4\. Rešiti nejednačinu $\left(\sqrt{2}+1\right)^{\frac{6x-6}{x+1}}\le\left(\sqrt{2}-1\right)^{-x}$.

5\. Odrediti jednačine tangenti elipse $x^2+4y^2=100$ povučenih iz tačke $A(2,7)$.

6\. Dijagonale jednakokrakog trapeza su uzajamno normalne. Izračunati njegovu površinu ako je krak $c=2\sqrt{5}cm$, a odnos osnovica je 3:1.

7\. Osnova piramide je trougao čije su stranice $a=12\ cm,\ b=16\ cm$ и $c=20cm$, a bočne ivice su jednake i imaju dužinu 26 cm. Izračunati zapreminu piramide.

8\. Deveti član aritmetičke progresije je pet puta veći od drugog člana, a pri deljenju trinaestog člana sa šestim članom dobija se količnik 2 i ostatak 5. O kojoj progresiji je reč?

9\. Odrediti najmanju i najveću vrednost funkcije

$$f(x)=\begin{cases}2^x, & x\le 0\\ -x^2+8x+1, & x>0\end{cases}\qquad \text{na segmentu } [-1,8].$$

10\. Skicirati grafike funkcija:

a) $y=2|sinx|$; b) $y=cos\frac{x}{2}$; v) $y=log_2 2x$; g) $y=\frac{1}{|x|}$.

1.a) $200 \cdot \frac{13}{100} = 26 < 27 = 90 \cdot \frac{30}{100}$.

b) $$\frac{a^{-2}+b^{-2}}{a^{-1}+b^{-1}} \cdot \left(\frac{a^2+b^2}{ab} \right)^{-1} : \frac{a^{-1}-b^{-1}}{a^2-b^2} = \frac{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \cdot \frac{ab}{a^2+b^2} \cdot \frac{a^2-b^2}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}} =$$

$$= \frac{\frac{b^2+a^2}{a^2b^2}}{\frac{a+b}{ab}} \cdot \frac{ab}{a^2+b^2} \cdot \frac{(a-b)(a+b)}{\frac{b-a}{ab}} = \frac{b^2+a^2}{ab(a+b)} \cdot \frac{ab}{a^2+b^2} \cdot \frac{(a-b)(a+b)}{-(a-b)} =$$

$= -ab$, uz uslov $ab \neq 0, a \neq -b, a \neq b$.

2. a) Ako jednačinu $x - \frac{1+\frac{3}{4}x}{4} + \frac{5-\frac{2}{3}x}{4} = \frac{3-\frac{x}{2}}{3}$ pomnožimo sa $NZS(3,4)$, tj. sa 12, dobijamo ekvivalentnu jednačinu

$$12x - 3\left(1+\frac{3}{4}x\right) + 3\left(5-\frac{2}{3}x\right) - 4\left(3-\frac{x}{2}\right) = 0$$

odakle sredjivanjem dobijamo da je $\frac{39}{4}x = 0$, odnosno da je $x = 0$.

b) Jednačina ima smisla za $x^2 + 2|x| > 0$, tj. za $x \neq 0$ i, kako je $|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$, bi}e $log_{\frac{1}{3}}\left(x^2+2|x|\right) = -1 \Leftrightarrow x^2+2|x| = \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left(x^2+2x-3=0 \wedge x>0\right) \vee \left(x^2-2x-3=0 \wedge x<0\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\left(x=1 \vee x=-3\right) \wedge x>0\right) \vee \left(x=3 \vee x=-1\right) \wedge x<0 \quad \Leftrightarrow x=1 \vee x=-1.$$

3. Koristeći formule $cos\,2\alpha = cos^2\,\alpha - sin^2\,\alpha$,

$sin\,2\alpha = 2\,sin\,\alpha\,cos\,\alpha$,

$sin^2\,\alpha + cos^2\,\alpha = 1$ i

$a^4 + b^4 = \left(a^2+b^2\right)^2 - 2a^2b^2$, dobijamo da je

$3 + 4\,cos\,2\alpha + cos\,4\alpha =$

$$= 3 + 4\left(cos^2\alpha - sin^2\alpha\right) + cos^2 2\alpha - sin^2 2\alpha$$

$$= 3 + 4\left(cos^2\alpha - sin^2\alpha\right) + \left(cos^2\alpha - sin^2\alpha\right)^2 - \left(2\, sin\alpha\, cos\alpha\right)^2$$

$$= 3\left(sin^2\alpha + cos^2\alpha\right) + 4\left(cos^2\alpha - sin^2\alpha\right) + cos^4\alpha + sin^4\alpha - 6\, sin^2\alpha\, cos^2\alpha$$

$$= 7\, cos^2\alpha - sin^2\alpha + \left(cos^2\alpha + sin^2\alpha\right)^2 - 2\, cos^2\alpha\, sin^2\alpha - 6\, sin^2\alpha\, cos^2\alpha$$

$$= 7\, cos^2\alpha - sin^2\alpha + 1 - 8\, sin^2\alpha\, cos^2\alpha$$

$$= 7\, cos^2\alpha - sin^2\alpha + sin^2\alpha + cos^2\alpha - 8\, sin^2\alpha\, cos^2\alpha$$

$$= 8\, cos^2\alpha - 8\, sin^2\alpha\, cos^2\alpha$$

$$= 8\, cos^2\alpha\ \left(1 - sin^2\alpha\right)$$

$$= 8\, cos^2\alpha\, cos^2\alpha$$

$$= 8\, cos^4\alpha\,.$$

4. Zadatak ima smisla ako je $x \neq -1$. Tada je :

$$\left(\sqrt{2}+1\right)^{\frac{6x-6}{x+1}} \le \left(\sqrt{2}-1\right)^{-x} \Leftrightarrow \left(\sqrt{2}+1\right)^{\frac{6x-6}{x+1}} \le \left(\frac{1}{\sqrt{2}-1}\right)^{x} \Leftrightarrow$$

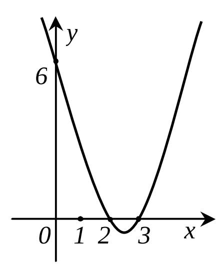
$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{2}+1\right)^{\frac{6x-6}{x+1}} \le \left(\frac{1}{\sqrt{2}-1}\cdot\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1}\right)^{x} \Leftrightarrow \left(\sqrt{2}+1\right)^{\frac{6x-6}{x+1}} \le \left(\sqrt{2}+1\right)^{x} \Leftrightarrow$$

(osnova eksponencijalne funkcije je veća od jedan)

$$\Leftrightarrow \frac{6x-6}{x+1} \le x \Leftrightarrow \frac{6x-6-x^2-x}{x+1} \le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-5x+6}{x+1} \ge 0 \Leftrightarrow \frac{\left(x+2\right)\left(x+3\right)}{x+1} \ge 0 \Leftrightarrow$$

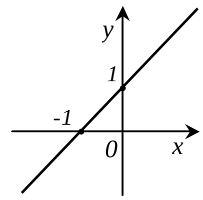
(videti slike 12 i 13 i tablicu)



Sl. 12

$\Leftrightarrow x \in (-1, 2] \cup [3, +\infty)$.

x	$(-\infty, -1)$	$(-1, 2)$	$(2, 3)$	$(3, +\infty)$
$x^2 - 5x + 6$	$+$	$+$	$-$	$+$
$x + 1$	$-$	$+$	$+$	$+$
$\frac{x^2 - 5x + 6}{x + 1}$	$-$	$+$	$-$	$+$



Sl. 13

5. Neka je $y = kx + n$ jednačina tangente elipse $x^2 + 4y^2 = 100$,

čiji je kanonski oblik $\frac{x^2}{10^2} + \frac{y^2}{5^2} = 1$. Uslov dodira ove elipse i

prave $y = kx + n$ je $100k^2 + 25 = n^2$. Tačka $A(2,7)$ pripada pravoj

$y = kx + n$, pa je $7 = 2k + n$. Rešavanjem sistema jednačina

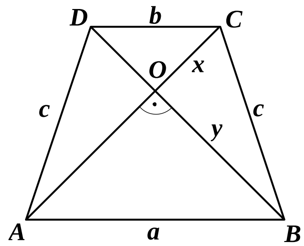
$100k^2 + 25 = n^2 \wedge 7 = 2k + n$ dobijamo da je $k = \frac{3}{8}$ i $n = \frac{25}{4}$, ili da je

$k = -\frac{2}{3}$ i $n = \frac{25}{3}$, pa su jednačine traženih tangenti:

$$t_1 : 3x - 8y + 50 = 0 \text{ i } t_2 : 2x + 3y - 25 = 0.$$

6. Trouglovi ABO i CDO su slični jer su im svi odgovarajući uglovi jednaki, pa su im parovi odgovarajućih stranica proporcionalni. Kako je $AB : CD = OB : OC$, tj. $3 : 1 = OB : OC$, biće $OB = 3OC$.

Označimo duži OB, OC i BC redom sa *y*, *x* i *c*. (sl. 14)



Sl. 14

Trougao BOC je pravougli, pa je:

$$c^2 = x^2 + y^2 \Leftrightarrow \left(2\sqrt{5}\right)^2 = x^2 + (3x)^2 \Leftrightarrow x^2 = 2,$$

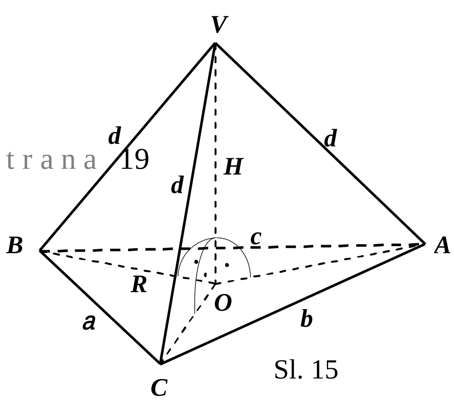
iz čega sledi da je $x = \sqrt{2}$. Dijagonale jednakokrakog trapeza su uzajamno normalne i jednake, pa , ako označimo dijagonale AC i BD sa d , sledi da je

$$P_{ABCD} = \frac{d^2}{2} = \frac{(x+y)^2}{2} = \frac{\left(\sqrt{2} + 3\sqrt{2}\right)^2}{2} = \frac{\left(4\sqrt{2}\right)^2}{2} = 16cm^2.$$

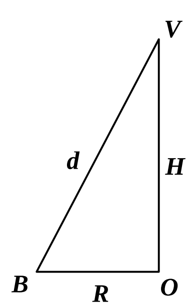
7. Iz podudarnosti trouglova VOB , VOC i VOA (sl. 15; podudarne su po dve odgovarajuće stranice i ugao naspram veće od njih) zaključujemo da se podnožje visine piramide nalazi u centru opisanog kruga oko trougla ABC . Površina baze može se izračunati pomoću Heronovog obrasca:

$B = P_{ABC} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{24 \cdot 12 \cdot 8 \cdot 4} = 96\,cm^2$. Kako je

$P_{\Delta} = \dfrac{abc}{4R}$, to je $R = \dfrac{abc}{4P_{\Delta}} = \dfrac{12 \cdot 16 \cdot 20}{4 \cdot 96} = 10cm.$



Sl. 15



Sl. 16

Visinu piramide (sl. 16) izračunavamo pomoću Pitagorine teoreme:

$$H=\sqrt{d^2-R^2}=\sqrt{26^2-10^2}=\sqrt{(26-10)(26+10)}=4\cdot 6=24.$$

Sada možemo izračunati zapreminu piramide:

$$V=\frac{1}{3}BH=\frac{1}{3}\cdot 96\cdot 24=768cm^3.$$

Napomena: Ako uočimo da je bazni trougao pravougli, jer je

$12^2+16^2=20^2$, možemo koristiti formulu $R=\dfrac{c}{2}$.

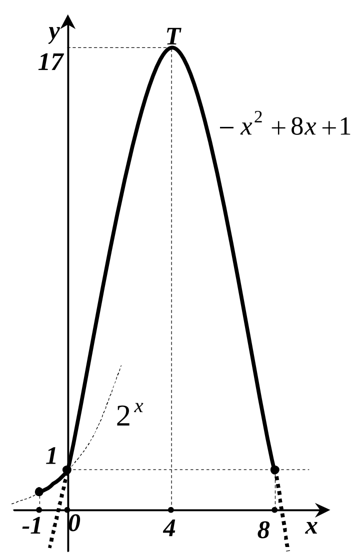
8. Neka je a_1 prvi ~lan, a d razlika date aritmetičke progresije. Prema uslovu zadatka sledi da je

$$\left.\begin{array}{l} a_9=5\cdot a_2 \\ a_{13}=2a_6+5 \end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l} a_1+8d=5(a_1+d) \\ a_1+12d=2a_1+10d+5 \end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3d=4a_1 \\ 2d-5=a_1 \end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} 3d=4(2d-5) \\ a_1=2d-5 \end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l} d=4 \\ a_1=3 \end{array}\right\}.$$

Prvih nekoliko članova progresije je 3, 7, 11, 15, 19, ...

9. Funkcija $y=2^x$ je rastuća i $f(-1)=\dfrac{1}{2}$, $f(0)=1$. Koordinate temena parabole $y=-x^2+8x+1$

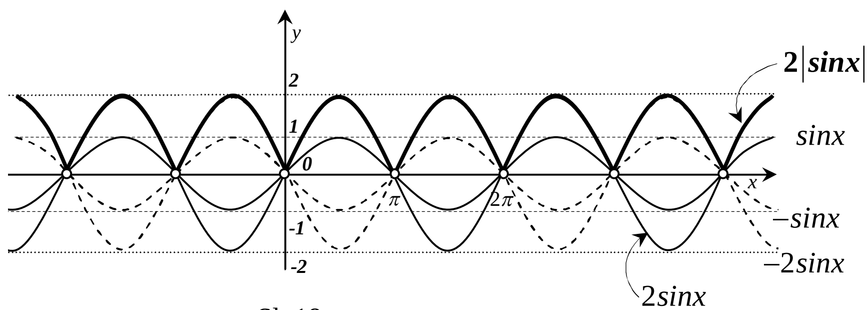


Sl. 17

su : $x_T = -\dfrac{b}{2a} = 4$ i $y_T = \dfrac{-D}{4a} = 17$.

Grafik funkcije prikazan je na slici 17. Najmanja vrednost funkcije je $\dfrac{1}{2}$ i postiže se u ta~ki $x = -1$, a najveća vrednost date funkcije je 17 i postiže se u tački $x = 4$.

10. a) $y = 2 \left| \sin x \right| = \begin{cases} 2 \sin x, & \sin x \geq 0 \\ -2 \sin x, & \sin x < 0 \end{cases}$

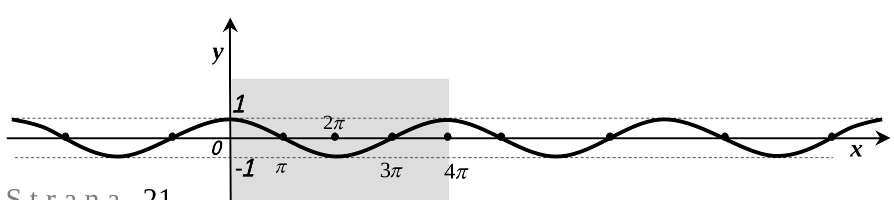


Sl. 18

b) Osnovni period funkcije $y = \cos\dfrac{x}{2}$ je $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = \dfrac{2\pi}{1/2} = 4\pi$.

x	0	π	2π	3π	4π
$\dfrac{x}{2}$	0	$\dfrac{\pi}{2}$	π	$\dfrac{3\pi}{2}$	2π
y	1	0	-1	0	1

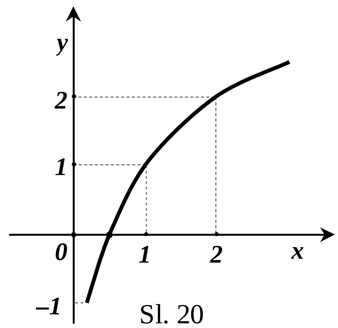
Grafik funkcije prikazan je na slici 19.



Sl. 19

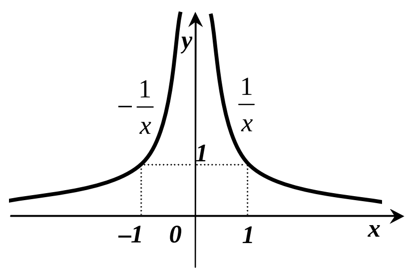
v) $y = log_2 2x,\ x > 0$

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
y	-1	0	1	2	3



Sl. 20

g) $$y = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x > 0 \\ -\frac{1}{x}, & x < 0 \end{cases}$$



Sl. 21

Test broj 4

1. a) Izračunati: $2^{2^{-2}} : 2^{-2^{-2}}$.

   b) Za $a = 0{,}003$ i $b = 5{,}994$ odrediti vrednost izraza
   $I(a,b) = \left(\frac{1}{a-3b} - \frac{1}{a+3b} + \frac{6b}{a^2-9b^2}\right) : \frac{b(2a+b)}{a^2-9b^2}$.

2. Rešiti jednačine:

   a) $\frac{2x+1}{7} - \frac{3x-2}{3} = \frac{4x+5}{21} - \frac{1}{3}$;

   b) $(f(x))^2 + f(x) = 0$ ako je $f(x) = \begin{cases} log_2 x, & x \geq 1 \\ x-1, & x < 1 \end{cases}$.

3. Rešiti trigonometrijsku jednačinu $sin^2 2x + sin^2 3x = 1$.

4. Za koje vrednosti realnog parametra k jednačina
   $(k-2)x^2 - 2kx + k - 1 = 0$ ima pozitivna rešenja?

5. Na krivoj $3x^2 - 4y^2 = 72$ odrediti tačku najbližu pravoj $3x + 2y + 1 = 0$.

6. U trouglu ABC je $BC = 5, AC = 8,$ $\angle BAC = 30°$ i $\angle ABC < 90°$. Odrediti AB.

7. Izračunati zapreminu prave zarubljene kupe ako su površine njenih osnova $25\pi\, cm^2$ i $4\pi\, cm^2$, a površina omotača $35\pi\, cm^2$.

8. Hipotenuza jednakokrakog pravouglog trougla je 1. Nad njegovom katetom, kao nad hipotenuzom, konstruisan je novi jednakokraki pravougli trougao. Nad katetom novog trougla, kao nad hipotenuzom, konstruisan je, opet, jednakokraki pravougli trougao, itd. do beskraja. Koliki je zbir površina svih tako dobijenih trouglova (uključujući i polazni)?

9. Rešiti sistem jednačina $\left.\begin{array}{r} log_y x + log_x y = 2 \\ x^2 - y = 2 \end{array}\right\}$.

10. U xOy -ravni za $k \in R$ skicirati linije odredjene jednačinama:

    a) $y = x + k$, b) $x^2 + y|y| = 1$, v) $y = kx^2 - 2kx + k + 1$.

Rešenja testa broj 4

1. a) $2^{2^{-2}} : 2^{-2^{-2}} = 2^{\frac{1}{4}} : 2^{-\frac{1}{4}} = 2^{\frac{1}{4}} \cdot 2^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$.

b) $I\left(a,b\right) = \dfrac{a+3b-\left(a-3b\right)+6b}{a^2-9b^2} \cdot \dfrac{a^2-9b^2}{b\left(2a+b\right)} = \dfrac{12b}{b\left(2a+b\right)} =$

$= \dfrac{12}{2a+b}, \quad a \neq -\dfrac{b}{2}, \quad b \neq 0$.

$I(0{,}003\ ;\ 5{,}994) = \dfrac{12}{2\cdot 0{,}003 + 5{,}994} = \dfrac{12}{6} = 2$.

2.a) Ako jednačinu $\dfrac{2x+1}{7} - \dfrac{3x-2}{3} = \dfrac{4x+5}{21} - \dfrac{1}{3}$ pomnožimo sa $NZS(7,3)$,tj. sa 21, dobijamo ekvivalentnu jednačinu $3(2x+1)-7(3x-2) = 4x+5-7$, koja se sre|ivawem svodi na jednačinu $-19x+19=0$, a njeno rešnje je $x=1$.

b) 1° Za $x \geq 1$ je $f\left(x\right) = log_2 x$.

$$log_2^2 x + log_2 x = 0 \Leftrightarrow log_2 x\left(log_2 x + 1\right) = 0$$
$$\Leftrightarrow log_2 x \quad 0 \vee log_2 x \quad -1$$
$$\Leftrightarrow x = 1 \vee x = \frac{1}{2},$$

pa je , zbog uslova $x \geq 1$, jedino rešenje ove jednačine $x=1$.

2° Za $x<1$ je $f(x) = x-1$.

$$(x-1)^2 + (x-1) = 0 \quad \Leftrightarrow (x-1)\left((x-1)+1\right) = 0$$
$$\Leftrightarrow x-1 = 0 \vee x = 0$$
$$\Leftrightarrow x = 1 \vee x = 0,$$

pa je, zbog uslova $x<1$, jedino rešenje ove jednačine $x=0$.
Dakle, skup rešenja date jednačine je $\{0,1\}$.

3. Koristeći identitete:

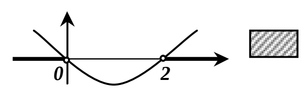
$sin^2 x = \dfrac{1-cos\,2x}{2}$ i $cos\,\alpha + cos\,\beta = 2\,cos\,\dfrac{\alpha+\beta}{2} cos\,\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

dobija se:

$$sin^2 2x + sin^2 3x = 1 \Leftrightarrow \frac{1-cos\,4x}{2} + \frac{1-cos\,6x}{2} = 1$$
$$\Leftrightarrow cos\,4x + cos\,6x = 0$$
$$\Leftrightarrow 2\,cos\,5x\,cos\,x = 0$$
$$\Leftrightarrow cos\,5x = 0 \vee cos\,x = 0$$
$$\Leftrightarrow 5x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z \vee x = \frac{\pi}{2} + l\pi,\ l \in Z$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{10} + k\frac{\pi}{5},\ k \in Z \vee x = \frac{\pi}{2} + l\pi,\ l \in Z\ .$$

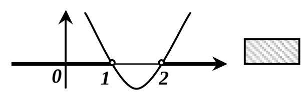
4.Da bi rešenja x_1 i x_2 jednačine $ax^2+bx+c=0$ bila pozitivna, treba da budu ispunjeni sledeći uslovi: $x_1+x_2>0$, $x_1x_2>0$ i $D\ge 0$.

$(1)\ x_1+x_2=-\frac{b}{a}=\frac{2k}{k-2}>0$,tj. $2k(k-2)>0$,



pa je $k\in(-\infty,0)\cup(2,\infty)$.

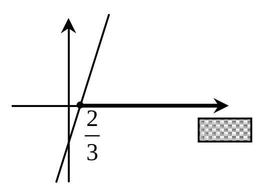
$(2)\ x_1x_2=\frac{c}{a}=\frac{k-1}{k-2}>0$,tj. $(k-1)(k-2)>0$,



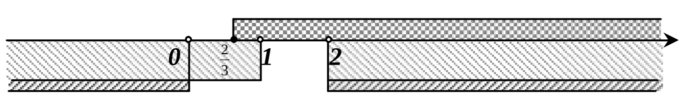
pa je $k\in(-\infty,1)\cup(2,\infty)$.

$(3)\ D=b^2-4ac \quad 4k^2-4(k-2)\,(k-1)\ge 0$,

$$4k^2-4k^2+12k-8\ge 0$$
$$4(3k-2)\ge 0 \Rightarrow k\in\left[\frac{2}{3},\infty\right).$$



Presek skupova rešenja uslova (1),(2) i (3) je traženo rešenje i nalazimo ga koristeći sliku 22:



Sl. 22

Prema tome,

$$k\in\left[\frac{2}{3},\infty\right)\wedge k\in(-\infty,0)\cup(2,\infty)\wedge k\in(-\infty,1)\cup(2,\infty)\Leftrightarrow k\in(2,\infty).$$

5. Data kriva je hiperbola čiji je kanonski oblik $\frac{x^2}{24}-\frac{y^2}{18}=1$. Dodirna tačka hiperbole i njene tangente, paralelene datoj pravoj biće tražena tačka. Data prava ima koeficijent pravca $k_p=-\frac{3}{2}$. Tangenta mora biti paralelna sa pravom p, pa je $k_t=-\frac{3}{2}$. Uslov dodira prave $y=kx+n$ i hiperbole $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ je $a^2k^2-b^2=n^2$. Iz jednačine $24\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)^2-18=n^2$ dobija se da je $n=6$ ili $n=-6$.
Tangente hiperbole, paralelne pravoj p, imaju jednačine:

$$t_1: 3x+2y-12=0 \quad \text{i} \quad t_2: 3x+2y+12=0.$$

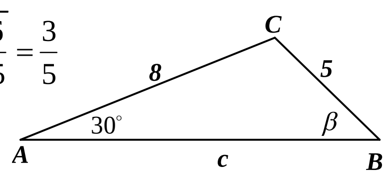
Rešavanjem sistema $\left.\begin{array}{r}3x^2-4y^2=72\\3x+2y-12=0\end{array}\right\}$ i $\left.\begin{array}{r}3x^2-4y^2=72\\3x+2y+12=0\end{array}\right\}$ dobijaju se tačke $P_1(6,-3)$ i $P_2(-6,3)$. Prema formuli za rastojanje tačke od prave sledi da je

$$d(P_1,p)=\left|\frac{3\cdot6-2\cdot3+1}{\sqrt{9+4}}\right|=\frac{13}{\sqrt{13}} \quad \text{i} \quad d(P_2,p)=\left|\frac{-3\cdot6+2\cdot3+1}{\sqrt{9+4}}\right|=\frac{11}{\sqrt{13}}.$$

Dakle, tačka $P_2(-6,3)$ je tražena tačka.

6. Na osnovu sinusne teoreme važi $\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}$, tj. $\frac{5}{\frac{1}{2}}=\frac{8}{\sin\beta}$ (sl. 23). Na osnovu implikacije

$$\sin\beta=\frac{4}{5}\wedge 0<\beta<\frac{\pi}{2}\Rightarrow \cos\beta=\sqrt{1-\frac{16}{25}}=\frac{3}{5}$$



Sl. 23

i na osnovu kosinusne teoreme važi $b^2=a^2+c^2-2ac\cos\beta$, odnosno

$64 = 25 + c^2 - 2\cdot 5\cdot c\cdot \frac{3}{5}$, odakle je $c^2 - 6c - 39 = 0$. Rešavanjem kvadratne jednačine i uzimajući u obzir da je $c > 0$, proističe da je $c = 3 + 4\sqrt{3}$.

7. Kako je poznato da je $B_1 = 4\pi\, cm^2$ i $B_2 = 25\pi\, cm^2$, to se mogu odrediti poluprečnici baza:

$$r_1^2\pi = 4\pi \Rightarrow r_1 = 2cm\ ,$$

$$r_2^2\pi = 25\pi \Rightarrow r_2 = 5cm\,.$$

Sada, iz $M = 35\pi\, cm^2$ može se odrediti izvodnica zarubljene kupe:

$$\pi(r_1 + r_2)s = 35\pi \Rightarrow s = 5cm\,.$$

Pomo}u Pitagorine teoreme (sl.2) nalazi se visina zarubljene kupe:

$$H = \sqrt{s^2 - (r_2 - r_1)^2} = \sqrt{25-9} = 4cm\,.$$

Na osnovu poznatog obrasca za zapreminu zarubljene kupe sledi da

je $V = \frac{H}{3}\left(B_1 + \sqrt{B_1B_2} + B_2\right) = \frac{4}{3}\left(25\pi + \sqrt{25\pi\cdot 4\pi} + 4\pi\right) = 52\pi\, cm^3$

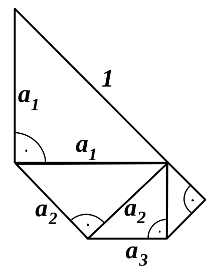
8. $a_1^2 + a_1^2 = 1 \Rightarrow a_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, pa je $P_1 = \frac{a_1^2}{2} = \frac{1}{4}$.

$$a_2^2 + a_2^2 = a_1^2 \Rightarrow a_2 = \frac{a_1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2},\ \text{pa je}\ P_2 = \frac{a_2^2}{2} = \frac{1}{8} = P_1\cdot\frac{1}{2}\,.$$

$$a_3^2 + a_3^2 = a_2^2 \Rightarrow a_3 = \frac{a_2}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}},\ \text{pa je}\ P_3 = \frac{a_3^2}{2} = \frac{1}{16} = P_1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2.$$

Indukcijom se može dokazati da je niz $P_1, P_2, P_3, \ldots\ldots. P_n, \ldots\ldots.$

geometrijski niz sa količnikom $q = \frac{1}{2}$. Kako je



Sl. 24

$$S_n = P_1 + P_2 + ...P_n = \frac{1}{4} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right),$$

prelaskom na graničnu vrednost, kada se n neograničeno uvećava, dobijamo da

je $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = \frac{1}{2}$.

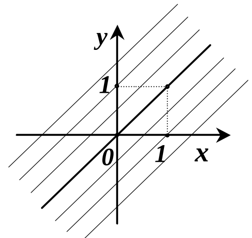
9. Sistem ima smisla za $x > 0, y > 0, x \neq 1$ i $y \neq 1$.

$$\left.\begin{array}{l} log_y\, x + log_x\, y = 2 \\ x^2 - y = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} log_y\, x + \dfrac{1}{log_y\, x} = 2 \\ x^2 - 2 = y \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} log_y^2\, x + 1 = 2\, log_y\, x \\ x^2 - 2 = y \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \left(log_y\, x - 1\right)^2 = 0 \\ x^2 - 2 = y \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} log_y\, x = 1 \\ x^2 - 2 = y \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = y \\ x^2 - x - 2 = 0 \end{array}\right\}.$$

Iz druge jednačine se dobija da je $x = 2$ ili $x = -1$. Prema uslovu zadatka, jedino rešenje sistema je $x = 2, y = 2$.

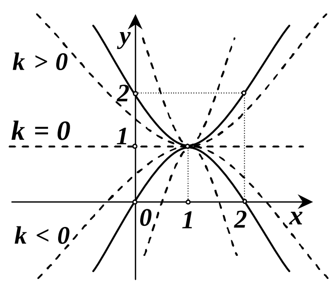
10. a) Linije u $xOy -$ravni odredjene jednačinama $y = x + k, k \in R$ su prave paralelne sa pravom $y = x$, (sl. 25).



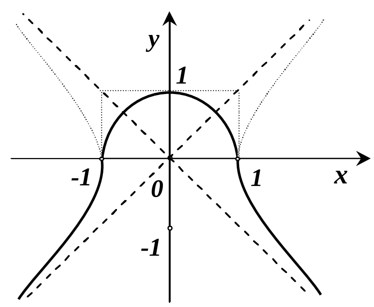
Sl.25

b) Jednačinu $y = kx^2 - 2kx + k + 1$ napišimo u obliku

$y = k\left(x^2 - 2x + 1\right) + 1$, odnosno u obliku $y = k(x-1)^2 + 1$. Sada se vidi da su linije odredjene ovim jednačinama parabole koje prolaze kroz tačku $M(1{,}1)$ za $k \neq 0$, i prava $y = 1$, za $k = 0$, (sl.26).



Sl. 26



Sl. 27

v) Kako je $|y| = \begin{cases} y, & y \geq 0 \\ -y, & y < 0 \end{cases}$, to jednačina $x^2 + y|y| = 1$ za $y \geq 0$

glasi $x^2 + y^2 = 1$, a linija koja joj odgovara je deo kružnice u prvom i drugom kvadrantu (sl. 27). Za $y < 0$ dobija se deo hiperbole $x^2 - y^2 = 1$ u trećem i četvrtom kvadrantu.

1. a) Izračunati $\sqrt{(-2)^2}+9^{-\frac{1}{2}}-81^{-2^{-2}}+3^{\frac{1}{log_2 3}}$.

b) Uprostiti $\left(3-\frac{(a+b)^2}{ab}\right)\cdot\left(\frac{b}{a}-\frac{a}{b}\right):\frac{a^3+b^3}{a^2b^2}$.

2. Rešiti jednačine:

a) $|3x-1|-|2-x|=1$, b) $\frac{1}{1+x+x^2+x^3+\cdots}=\frac{\sqrt{4x-1}}{2}$.

3. Rešiti trigonometrijsku jednačinu $cos\,2x+sin^2\,x=cos\,x$.

4. Rešiti nejednačinu $\frac{1}{x+1}>\frac{2x}{2x-1}$.

5. Odrediti tačku krive $2x^2+y^2=3$ koja je na najkraćem odstojanju od prave $2x-y+4=0$.

6. Kroz proizvoljnu tačku u datom trouglu povučene su prave paralelne stranicama i tako dobijena tri manja trougla čije su površine P_1, P_2 i P_3. Kolika je površina datog trougla?

7. U pravu kružnu kupu sa poluprečnikom osnove $r=4cm$ i visinom $H=6cm$ upisan je valjak maksimalne zapremine. Izračunati tu zapreminu.

8. Treći član aritmetičke progresije je 9, a razlika izmedju sedmog i drugog člana je 20. Koliko članova progresije treba sabrati da bi njihova suma bila 91?

9. Rešiti sistem jednačina $\left.\begin{array}{r} x+\sqrt{xy}+y=14 \\ x^2+xy+y^2=84 \end{array}\right\}$.

10. U xOy-ravni predstaviti skupove odredjene relacijama:

a) $(x^2+y)\cdot(y-x+1)\leq 0$, b) $(y-ln\,x)\cdot(x-1)\geq 0$,

v) $(x^2+y^2-1)\cdot(y+|x|)\leq 0$.

1. a) $\sqrt{(-2)^2}+9^{-\frac{1}{2}}-81^{-2^{-2}}+3^{\frac{1}{\log_2 3}}=|-2|+\dfrac{1}{\sqrt{9}}-81^{-\frac{1}{4}}+3^{\log_3 2}=$

$$=2+\frac{1}{3}-\left(3^4\right)^{-\frac{1}{4}}+2=2+\frac{1}{3}-\frac{1}{3}+2=4.$$

b) $\left(3-\dfrac{(a+b)^2}{ab}\right)\cdot\left(\dfrac{b}{a}-\dfrac{a}{b}\right):\dfrac{a^3+b^3}{a^2b^2}=$

$$=\frac{3ab-a^2-2ab-b^2}{ab}\cdot\frac{b^2-a^2}{ab}\cdot\frac{a^2b^2}{a^3+b^3}=$$

$$=\frac{-\left(a^2-ab+b^2\right)(b-a)(b+a)}{(a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)}\quad a-b$$, uz uslov $ab\neq 0,\ a\neq -b$.

2. a) Kako je $|3x-1|=\begin{cases}3x-1, & x\geq\frac{1}{3}\\ -(3x-1), & x<\frac{1}{3}\end{cases}$, i $|2-x|=\begin{cases}2-x, & x\leq 2\\ -(2-x), & x>2\end{cases}$,

jednačinu $|3x-1|-|2-x|=1$ ćemo rešavati posebno u sledećim intervalima: $\left(-\infty,\frac{1}{3}\right),\left[\frac{1}{3},2\right]$ i $(2,+\infty)$.

I) $\left[x<\frac{1}{3}\wedge(-3x+1-2+x=1)\right]\Leftrightarrow\left[x<\frac{1}{3}\wedge 2x=-2\right]\Leftrightarrow x=-1$

II) $\left[\frac{1}{3}\leq x\leq 2\wedge(3x-1-2+x=1)\right]\Leftrightarrow\left[\frac{1}{3}\leq x\leq 2\wedge 4x=4\right]\Leftrightarrow x=1$

III) $\left[x>2\wedge(3x-1-(-2+x)=1)\right]\Leftrightarrow\left[x>2\wedge 2x=0\right]\Leftrightarrow x\in\varnothing$

Prema tome, skup rešenja date jednačine je $\{-1,1\}$.

b) Kako zbir članova beskonačne geometrijske progresije postoji samo za $|q|<1$, a kvadratni koren postoji za nenegativne brojeve, to će, s obzirom na to da leva strana ne može biti 0, jednačina $\dfrac{1}{1+x+x^2+x^3+\cdots}=\dfrac{\sqrt{4x-1}}{2}$ imati smisla za $4x-1>0$ i $|x|<1$, tj. za $\dfrac{1}{4}<x<1$. Kako je $q=x$ pozitivno, to će biti $S_\infty=\dfrac{1}{1-x}$, pa važi:

$$\frac{1}{1+x+x^2+x^3+.....}=\frac{\sqrt{4x-1}}{2}\Rightarrow\frac{1}{\frac{1}{1-x}}=\frac{\sqrt{4x-1}}{2}\Rightarrow 4(1-x)^2=4x-1$$

$$\Rightarrow 4x^2-12x+5=0\Rightarrow x=\frac{5}{2}\vee x=\frac{1}{2}.$$

Prema uslovu zadatka, rešenje jednačine je samo $x=\dfrac{1}{2}$.

3. $cos\,2x+sin^2 x=cos\,x \Leftrightarrow cos^2 x-sin^2 x+sin^2 x=cos\,x$

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow cos^2 x-cos\,x=0\\&\Leftrightarrow cos\,x(cos\,x-1)=0\\&\Leftrightarrow cos\,x=0\ \vee cos\,x=1\\&\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in Z\quad\vee\quad x=2l\pi,\ l\in Z.\end{aligned}$$

4. Nejednačina $\dfrac{1}{x+1}>\dfrac{2x}{2x-1}$ ima smisla za $x\neq-1$ i $x\neq\dfrac{1}{2}$.

$$\frac{1}{x+1}>\frac{2x}{2x-1}\Rightarrow\frac{1}{x+1}-\frac{2x}{2x-1}>0\Rightarrow\frac{-2x^2-1}{(x+1)(2x-1)}>0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{-\left(2x^2+1\right)}{(x+1)(2x-1)}>0\Rightarrow(x+1)(2x-1)<0\Rightarrow x\in\left(-1,\frac{1}{2}\right).$$

5. Tražena tačka je dodirna tačka elipse $2x^2+y^2=3$ i njene tangente koja je paralelna datoj pravoj $p:\ 2x-y+4=0$.

Koeficijent pravca tangente jednak je koeficijentu pravca prave p. Eksplicitni oblik jednačine prave p je $y = 2x + 4$, iz čega sledi da je $k_p = 2$, pa je i $k_t = 2$. Iz kanonskog oblika jednačine elipse $e: \frac{x^2}{\frac{3}{2}} + \frac{y^2}{3} = 1$ nalazimo da je $a^2 = \frac{3}{2}$ i $b^2 = 3$, pa iz uslova dodira $n^2 = a^2k^2 + b^2$ prave $y = kx + n$ i elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, gde je $k = 2$, dobijamo da je $n^2 = 9$. Jednačine tangenti su:

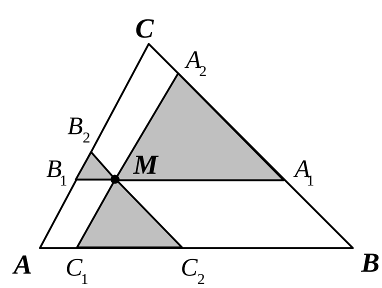
$$t_1 : y = 2x + 3 \quad \text{i} \quad t_2 : y = 2x - 3.$$

Rešavanjem sistema $\left.\begin{array}{ll} 2x^2 + y^2 & = 3 \\ 2x - y & = 3 \end{array}\right\}$ i $\left.\begin{array}{ll} 2x^2 + y^2 & = -3 \\ 2x - y & = -3 \end{array}\right\}$ dobijamo dodirne tačke $P_1(-1,1)$ i $P_2(1,-1)$. Rastojanja ovih tačaka do prave $p: \ 2x - y + 4 = 0$ su:

$$d(P_1, p) = \frac{|2\cdot(-1) - 1 + 4|}{\sqrt{4+1}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad \text{i} \quad d(P_2, p) = \frac{|2\cdot 1 + 1 + 4|}{\sqrt{4+1}} = \frac{7}{\sqrt{5}} \quad .$$

Dakle, tačka $P_1(-1,1)$ je tačka elipse koja je najbliža datoj pravoj p

6.



Sl. 68

Trouglovi MB_1B_2, A_1MA_2 i C_2C_1M su slični trouglu ABC (sl. 68), jer su im svi odgovarajući uglovi jednaki kao uglovi sa paralelnim kracima. Ako je $CB = a$, $B_2M = a_1$, $A_2A_1 = a_2$ i $A_1B = a_3$, prema uslovu zadatka sledi da je $a_1 + a_2 + a_3 = a$.

Površine sličnih trouglova se odnose kao kvadrati odgovarajućih stranica, pa je

$$\frac{P_1}{P} = \frac{a_1^2}{a^2} \Rightarrow P_1 = \frac{P \cdot a_1^2}{a^2} \Rightarrow \sqrt{P_1} = \frac{a_1}{a}\sqrt{P} \qquad (1)$$

$$\frac{P_2}{P} = \frac{a_2^2}{a^2} \Rightarrow P_2 = \frac{P \cdot a_2^2}{a^2} \Rightarrow \sqrt{P_2} = \frac{a_2}{a}\sqrt{P} \qquad (2)$$

$$\frac{P_3}{P} = \frac{a_3^2}{a^2} \Rightarrow P_3 = \frac{P \cdot a_3^2}{a^2} \Rightarrow \sqrt{P_3} = \frac{a_3}{a}\sqrt{P} \qquad (3)$$

Iz (1), (2) i (3) se dobija da je $\sqrt{P_1} + \sqrt{P_2} + \sqrt{P_3} = \sqrt{P}\left(\frac{a_1 + a_2 + a_3}{a}\right)$, iz čega sledi da je $P = \left(\sqrt{P_1} + \sqrt{P_2} + \sqrt{P_3}\right)^2$.

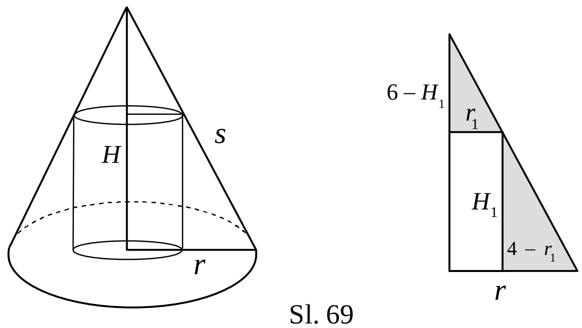
7. Neka je H_1 visina valjka upisanog u kupu (sl. 69). Prema uslovu zadatka, visina kupe je $H = 6\,cm$, a poluprečnik osnove kupe je $r = 4\,cm$. Na osnovu sličnosti trouglova osenčenih na slici 69, sledi da je $\frac{6 - H_1}{r_1} = \frac{H_1}{4 - r_1} \Rightarrow H_1 = \frac{24 - 6r_1}{4}$. Zapremina valjka je funkcija od r_1, tj. $V = f(r_1)$ i

$$V_v = B_1H_1 = \pi r_1^2 H_1 = \pi r_1^2\left(6 - \frac{3}{2}r_1\right) = \pi r_1^3\left(-\frac{3}{2}\right) + 6\pi r_1^2.$$

Iz $f'(r_1) = -\frac{9}{2}r_1^2\pi + 12\, r_1\pi$ i $f'(r_1) = 0 \Leftrightarrow r_1 = 0 \vee r_1 = \frac{8}{3}$

sledi da funkcija f prima svoju maksimalnu vrednost za $r_1 = \frac{8}{3}$,

pa je $V_{max} = \pi \cdot \frac{64}{9} \cdot 2 = \frac{128\pi}{9}\,cm^3$.



Sl. 69

8. Zbir prvih n članova aritmetičke progresije izračunava se po formuli $S_n = \frac{n}{2}\left[2a_1 + (n-1)d\right]$, $n \in N$. Kako je po uslovu zadatka

$$\left.\begin{aligned} a_7 - a_2 &= 20 \\ a_3 &= 9 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} a_1 + 6d - a_1 - d &= 20 \\ a_1 + 2d &= 9 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} 5d &= 20 \\ a_1 + 2d &= 9 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} d &= 4 \\ a_1 &= 1 \end{aligned}\right\},$$

to je $91 = \frac{n}{2}\left[2 \cdot 1 + (n-1)4\right]$, odnosno $2n^2 - n - 91 = 0$. Rešenja jednačine su $n = 7$ ili $n = -\frac{27}{4}$. Dakle, treba uzeti 7 članova progresije da bi njihov zbir bio 91.

9. Sistem ima smisla za $xy \geq 0$. Kako je

$$\begin{aligned}(14 - x - y)^2 &= 14^2 + x^2 + y^2 - 2 \cdot 14 \cdot x - 2 \cdot 14 \cdot y + 2xy \\ &= 196 + x^2 + y^2 - 28x - 28y + 2xy,\end{aligned}$$

to je
$$\left.\begin{aligned} \sqrt{xy} &= 14 - x - y \\ x^2 + xy + y^2 &= 84 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} xy &= 196 + x^2 + y^2 - 28x - 28y + 2xy \\ x^2 + xy + y^2 &= 84 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} x^2+xy+y^2=28(x+y)-196 \\ x^2+xy+y^2=84 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 28(x+y)=196+84 \\ x^2+xy+y^2=84 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y=10 \\ x^2+xy+y^2=84 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x=10-y \\ (10-y)^2+y^2+(10-y)y=84 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} x=10-y \\ y^2-10y+16=0 \end{array}\right\}.$$

Rešavanjem druge jednačine sistema dobijamo da je $y=8$ ili $y=2$. Skup rešenja sistema je $\{(8,2),(2,8)\}$.

II na~in:

Kako je $x^2+xy+y^2=(x+y)^2-xy$, to će dati sistem biti ekvivalentan sistemu: $\left.\begin{array}{r} x+y+\sqrt{xy}=14 \\ (x+y)^2-xy=84 \end{array}\right\}$. Uvodjenjem smene $a=x+y$, $b=\sqrt{xy}$ dobija se da je

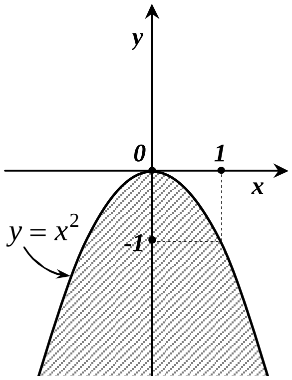
$$\left.\begin{array}{l} a+b=14 \\ a^2-b^2=84 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a+b=14 \\ (a-b)(a+b)=84 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a+b=14 \\ a-b=6 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a=10 \\ b=4 \end{array}\right\}.$$

Prelaskom na stare promenljive , jednostavno se dolazi do rešnja sistema.

10.a) $(x^2+y)(y-x+1)\le 0 \;\Leftrightarrow$

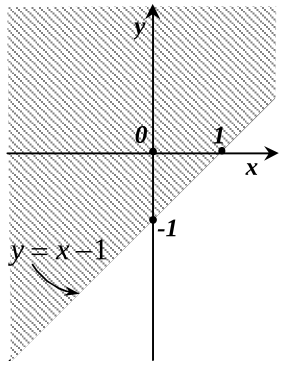
$\Leftrightarrow (x^2+y\le 0 \wedge y-x+1\ge 0)\vee(x^2+y\ge 0 \wedge y-x+1\le 0)$

$\Leftrightarrow (y\le -x^2 \wedge y\ge x-1)\vee(y\ge -x^2 \wedge y\le x-1)$.



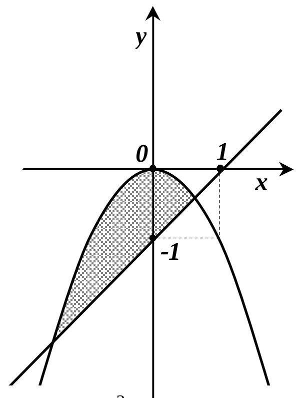
$y \leq -x^2$

Sl. 70



$y \geq x - 1$

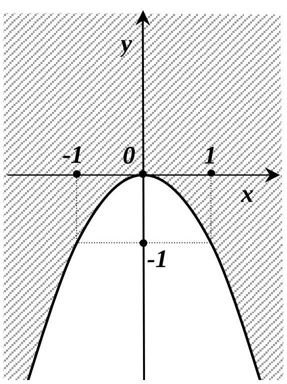
Sl. 71



$y \leq -x^2 \wedge y \geq x - 1$

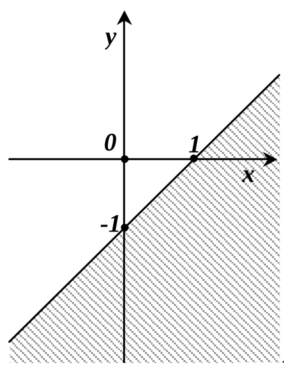
Sl. 72

Presek skupova prikazanih na slikama 70 i 71 predstavljen je na slici 72.



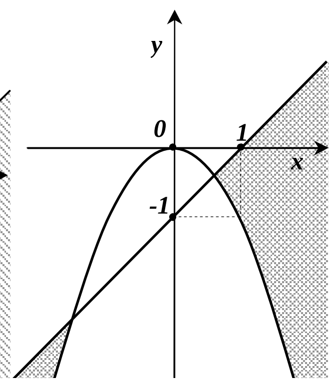
$y \geq -x^2$

Sl. 73



$y \leq x - 1$

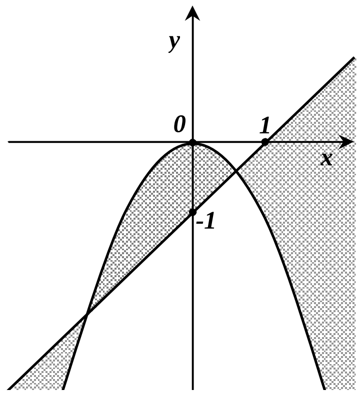
Sl. 74



$y \geq -x^2 \wedge y \leq x - 1$

Sl. 75

Presek skupova prikazanih na slikama 73 i 74 predstavljen je na slici 75.



$$\left(y \le -x^2 \wedge y \ge x-1\right) \vee \left(y \ge -x^2 \wedge y \le x-1\right)$$

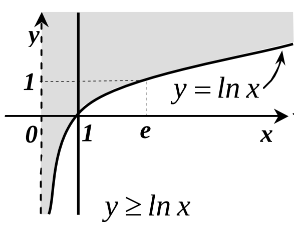
Sl. 76

Unija skupova prikazanih na slikama 72 i 75 ,tj. konačno rešenje, prikazano je na slici 76.

b)

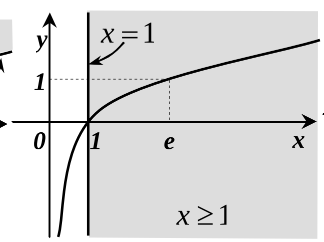
$$\left(y-\ln x\right)\left(x-1\right) \ge 0 \Leftrightarrow \left(y-\ln x \ge 0 \wedge x-1 \ge 0\right) \vee \left(y-\ln x \le 0 \wedge x-1 \le 0\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(y \ge \ln x \wedge x \ge 1\right) \vee \left(y \le \ln x \wedge x \le 1\right)$$



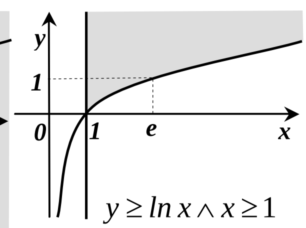
$y \ge \ln x$

Sl. 77



$x \ge 1$

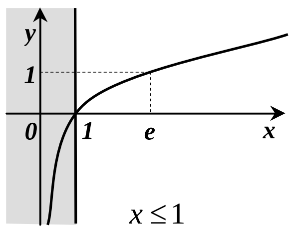
Sl. 78



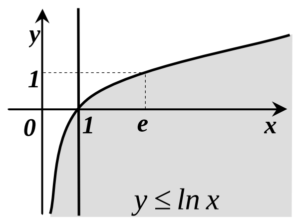
$y \ge \ln x \wedge x \ge 1$

Sl. 79

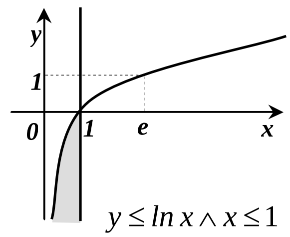
Presek skupova prikazanih na slikama 77 i 78 predstavljen je na slici 79.



Sl. 80

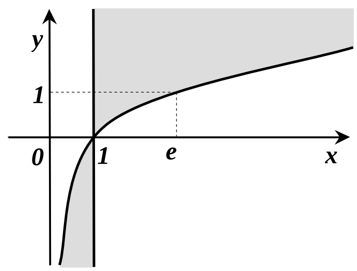


Sl. 81



Sl. 82

Presek skupova prikazanih na slikama 80 i 81 predstavljen je na slici 82.



$$\left(y \geq ln\, x \wedge x \geq 1\right) \vee \left(y \leq ln\, x \wedge x \leq 1\right)$$

Sl. 83

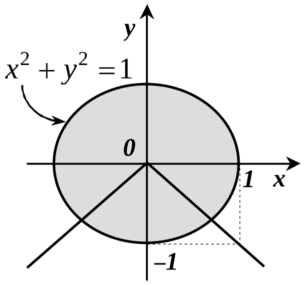
Unija skupova prikazanih na slikama 79 i 82 predstavljena je na slici 83, što je i konačno rešenje zadatka.

v)

$$\left(x^2 + y^2 - 1\right)\left(y + |x|\right) \leq 0 \Leftrightarrow$$

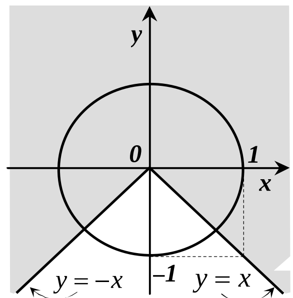
$$\Leftrightarrow \left(x^2 + y^2 - 1 \leq 0 \wedge y + |x| \geq 0\right) \vee \left(x^2 + y^2 - 1 \geq 0 \wedge y + |x| \leq 0\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2 + y^2 \leq 1 \wedge y \geq -|x|\right) \vee \left(x^2 + y^2 \geq 1 \wedge y \leq -|x|\right)$$



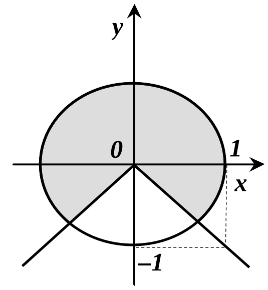
$x^2+y^2\le 1$

Sl. 84



$y\ge -|x|$

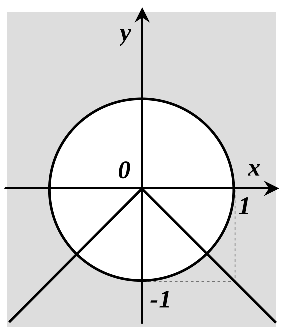
Sl. 85



$x^2+y^2\le 1\wedge y\ge -|x|$

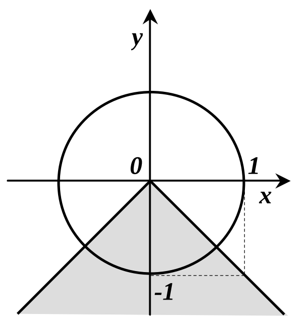
Sl. 86

Presek skupova prikazanih na slikama 84 i 85 predstavljen je na slici 86.



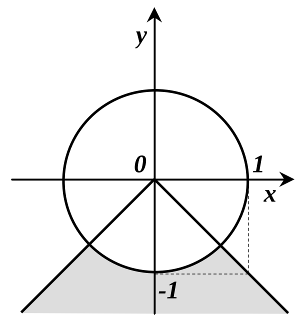
$x^2+y^2\ge 1$

Sl. 87



$y\le -|x|$

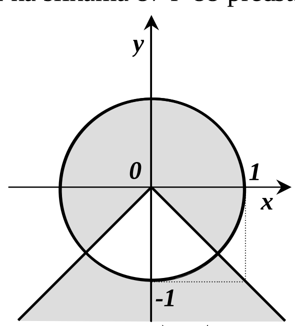
Sl. 88



$x^2+y^2\ge 1\wedge y\le -|x|$

Sl. 89

Presek skupova prikazanih na slikama 87 i 88 predstavljen je na slici 89.



$\left(x^2+y^2\le 1\wedge y\ge -|x|\right)\vee\left(x^2+y^2\ge 1\wedge y\le -|x|\right)$

Sl. 90

Unija skupova prikazanih na slikama 86 i 89 predstavljena je na slici 90, što je i konačno rešenje zadatka.