UNIVERZITET U BANJOJ LUCI

ELEKTROTEHNIČKI FAKULTET

ZADACI
SA KVALIFIKACIONIH ISPITA
2001-2008.

Banja Luka

2008.

Dr Zoran Mitrović

Mr Biljana Vojvodić

ZADACI
SA KVALIFIKACIONIH ISPITA
2001-2008.

1962

Banja Luka

2008.

Dr Zoran Mitrović, Mr Biljana Vojvodić
Zadaci sa kvalifikacionih ispita 2001-2008.

Izdavač
Elektrotehnički fakultet, Banja Luka

KVALIFIKACIONI ISPIT IZ MATEMATIKE
02.07.2001.

1. Uprostiti izraz
$$\frac{2x}{x+1}+\frac{3x^2-2x+1}{x^3+1}-\frac{x-1}{x^2-x+1}.$$

2. Riješiti jednačinu $\quad |x-2|=2x+1.$

3. Riješiti nejednačinu $\quad 9^x-9^{1-x}\geq 8.$

4. Riješiti nejednačinu $\quad \sqrt{x^2+2x-8}> x-1.$

5. Dokazati identitet
$$1-\frac{\sin^2\alpha}{1+ctg\alpha}-\frac{\cos^2\alpha}{1+tg\alpha}=\frac{\sin 2\alpha}{2}.$$

6. Ako u trouglu vrijedi $(a+b+c)(a+b-c)=3ab$, dokazati da je $\gamma=\frac{\pi}{3}$.

7. Riješiti jednačinu
$$1+\sin x+\cos x+\sin 2x+\cos 2x=0.$$

8. Odrediti jednačinu kružnice koja prolazi kroz tačku $(8,9)$ i dodiruje svaku od koordinatnih osa.

9. U pravougli trougao upisana je kružnica. Tačka dodira te kružnice sa hipotenuzom dijeli hipotenuzu na odsječke dužine 5 i 12. Naći poluprečnik te kružnice.

10. Riješiti sistem:
$$4^{\frac{x}{y}+\frac{y}{x}}=32,\qquad \log_3(x-y)=1-\log_3(x+y).$$

Rješenja:

1. Vrijedi

$$\frac{2x}{x+1}+\frac{3x^2-2x+1}{x^3+1}-\frac{x-1}{x^2-x+1}=\frac{2x}{x+1}+\frac{3x^2-2x+1}{(x+1)(x^2-x+1)}-\frac{x-1}{x^2-x+1}=$$

$$=\frac{2x(x^2-x+1)+3x^2-2x+1-(x-1)(x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)}=$$

$$=\frac{2x^3-2x^2+2x+3x^2-2x+1-x^2+1}{(x+1)(x^2-x+1)}=$$

$$=\frac{2(x^3+1)}{x^3+1}=2,\quad x\neq -1.$$

2. Pošto je

$$|x-2|=\begin{cases} x-2, x\geq 2\\ -x+2, x<2\end{cases},$$

razlikujemo dva slučaja:

a) za $x\in(-\infty,2)$ data jednačina je ekvivalentna jednačini

$-x+2=2x+1,$ odakle dobijamo $x=\frac{1}{3}$, i to je rješenje jednačine jer $\frac{1}{3}\in(-\infty,2)$;

b) za $x\in[2,\infty)$ data jednačina je ekvivalentna jednačini

$x-2=2x+1$, odakle je $x=-3,$ što nije rješenje jednačine jer $-3\notin[2,\infty)$.

3. Data nejednačina je ekvivalentna nejednačini

$$9^{2x}-8\cdot 9^x-9\geq 0,$$

koja se smjenom $9^x=t,\ t>0$ svodi na kvadratnu nejednačinu

$$t^2-8t-9\geq 0,$$

tj. $(t+1)(t-9)\geq 0$. Odavde dobijamo

$$t\in(-\infty,-1]\cup[9,\infty),$$

što uz uslov $t>0$, daje $t\in[9,\infty)$. Dakle,

$$9^x\in[9,\infty)\text{ , odnosno } x\in[1,\infty) .$$

4. Iz uslova $x^2+2x-8\geq 0$, tj. $(x+4)(x-2)\geq 0$ dobijamo

   (1) $x\in(-\infty,-4]\cup[2,\infty)$.

   Ako je $x-1<0,$ na osnovu (1) za $x\in(-\infty,-4]$ imamo

   $$\sqrt{x^2+2x-8}\geq 0>x-1.$$

   Ako je $x-1\geq 0,$ odnosno na osnovu (1) za $x\in[2,\infty)$, nakon kvadriranja dobijamo

   $$x^2+2x-8>x^2-2x+1, \text{tj. } x>\frac{9}{4}.$$

   Prema tome, rješenje date nejednačine je

   $$x\in(-\infty,-4]\cup\left(\frac{9}{4},\infty\right).$$

5. Vrijedi

   $$1-\frac{\sin^2\alpha}{1+ctg\alpha}-\frac{\cos^2\alpha}{1+tg\alpha}=1-\frac{\sin^2\alpha}{1+\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}-\frac{\cos^2\alpha}{1+\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}=$$

   $$=1-\frac{\sin^3\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}-\frac{\cos^3\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}=$$

   $$=1-\frac{(\sin\alpha+\cos\alpha)(\sin^2\alpha-\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha)}{\sin\alpha+\cos\alpha}=$$

   $$=1-\left(1-\frac{\sin 2\alpha}{2}\right)=\frac{\sin 2\alpha}{2}, \alpha\neq\frac{k\pi}{2}, \alpha\neq-\frac{\pi}{4}+n\pi, k,n\in Z.$$

6. Iz uslova $(a+b+c)(a+b-c)=3ab$, dobijamo $(a+b)^2-c^2=3ab,$ tj.

   $$c^2=a^2+b^2-ab.$$

   Iz kosinusne teoreme imamo $c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma,$ pa dobijamo

   $$\cos\gamma=\frac{1}{2}, \text{ tj. } \gamma=\frac{\pi}{3}.$$

7. Data jednačina je ekvivalentna slijedećim jednačinama

   $$1+\sin x+\cos x+2\sin x\cos x+\cos^2 x-\sin^2 x=0,$$

   $$1+\sin x+\cos x+2\sin x\cos x+2\cos^2 x-1=0,$$

   $$\cos x(1+2\cos x)+\sin x(1+2\cos x)=0,$$

   $$(\cos x+\sin x)(1+2\cos x)=0.$$

   Odavde dobijamo $\cos x+\sin x=0$ ili $1+2\cos x=0,$ tj.

$$tgx = -1 \text{ ili } \cos x = -\frac{1}{2}.$$

Rješenja jednačine su

$$x_k = -\frac{\pi}{4} + k\pi, x_m = \frac{4\pi}{3} + 2m\pi, x_n = \frac{2\pi}{3} + 2n\pi, k, m, n \in Z.$$

8. Neka je jednačina kružnice $(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2$. Pošto kružnica dodiruje obe koordinatne ose, vrijedi $|p| = |q| = r$, i pošto prolazi kroz datu tačku vrijedi

$$(8-p)^2 + (9-q)^2 = r^2.$$

Ako su p i q istog znaka, tj. $p = q$, dobijamo jednačinu

$$(8-p)^2 + (9-p)^2 = p^2,$$

odnosno kvadratnu jednačinu

$$p^2 - 34p + 145 = 0.$$

Njena rješenja su 5 i 29.

Ako su p i q suprotnog znaka, $p = -q$, dobijamo jednačinu

$$(8-p)^2 + (9+p)^2 = p^2,$$

tj. jednačinu

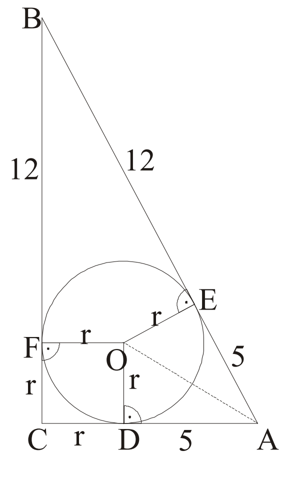
$$p^2 + 2p + 145 = 0,$$

koja nema realna rješenja.

Dakle, jednačine kružnica su

$$(x-5)^2 + (y-5)^2 = 5^2 \text{ i } (x-29)^2 + (y-29)^2 = 29^2.$$

9.



Trouglovi DAO i OAE su podudarni pa je DA=AE=5. Analogno je BE=BF=12. Primjenjujući Pitagorinu teoremu dobijamo

$$(r+12)^2 + (r+5)^2 = 17^2,$$

tj. kvadratnu jednačinu

$$r^2 + 17r - 60 = 0.$$

Poluprečnik kružnice je r=3.

10. Iz $2^{2\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)} = 2^5$, $x \neq 0, y \neq 0$, dobijamo $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=\frac{5}{2}$.

Uvođenjem smjene $\frac{x}{y}=t$, dobijamo kvadratnu jednačinu

$$2t^2 - 5t + 2 = 0,$$

čija su rješenja 2 i $\frac{1}{2}$.

Iz druge jednačine sistema, uz uslove $x+y>0$ i $x-y>0$, dobijamo

$$\log_3\left(x^2 - y^2\right) = \log_3 3.$$

Za $t=2$ dati sistem je ekvivalentan sistemu

$$x = 2y$$
$$x^2 - y^2 = 3.$$

Uvrštavajući x iz prve jednačine u drugu, dobijamo jednačinu $y^2 = 1$, čija su rješenja 1 i -1. Odavde dobijamo rješenja sistema (2,1), (-2,-1), od kojih samo rješenje (2,1) zadovoljava postavljene uslove.

Za $t=\frac{1}{2}$ dati sistem je ekvivalentan sistemu

$$y = 2x$$
$$x^2 - y^2 = 3.$$

Uvrštavajući y iz prve jednačine u drugu, dobijamo jednačinu

$$x^2 = -1$$

koja nema realnih rješenja.

Dakle, rješenje sistema je $(x, y) = (2,1)$.

KVALIFIKACIONI ISPIT IZ MATEMATIKE
05.09.2001.

1. Uprostiti izraz
$$\frac{\sqrt{\frac{1+a}{1-a}}+\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}}{\sqrt{\frac{1+a}{1-a}}-\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}}-\frac{1}{a},\ (-1<a<1,\quad a\neq 0).$$

2. Ako je $x-x^{-1}=a$, izračunati x^3-x^{-3}.

3. Za koje vrijednosti parametra a jednačina
$$(a-1)x^2+(2a+7)x+5(2a+7)=0$$
ima bar jedan realan korijen.

4. Riješiti nejednačinu $\dfrac{3+2x}{2-x}<-1$.

5. Riješiti jednačinu $\log x-\log\dfrac{1}{x-1}-\log 2=\log(2x+3)$.

6. Riješiti nejednačinu $\sin x+\sqrt{3}\cos x>1$.

7. Dokazati da za uglove α,β,γ proizvoljnog trougla vrijedi
$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma=1.$$

8. Na jednoj težišnoj liniji trougla ABC odabrati tačku M tako da zbir
$$s=MA^2+MB^2+MC^2$$
ima minimalnu vrijednost.

9. Ako su a i b paralelne stranice, c i d kraci trapeza, p i q dijagonale trapeza, dokazati da je
$$p^2+q^2=c^2+d^2+2ab.$$

10. Sastaviti jednačinu kružnice koja prolazi tačkama $A(-2,0)$ i $B(1,1)$ a centar joj leži na pravoj $x+y=0$.

Rješenja:

1. Vrijedi

$$\frac{\sqrt{\frac{1+a}{1-a}}+\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}}{\sqrt{\frac{1+a}{1-a}}-\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}}-\frac{1}{a}=\frac{\sqrt{\frac{1+a}{1-a}}+\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}}{\sqrt{\frac{1+a}{1-a}}-\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}}\cdot\frac{\sqrt{\frac{1+a}{1-a}}+\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}}{\sqrt{\frac{1+a}{1-a}}+\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}}-\frac{1}{a}=$$

$$=\frac{\frac{1+a}{1-a}+2\sqrt{\frac{1+a}{1-a}\cdot\frac{1-a}{1+a}}+\frac{1-a}{1+a}}{\frac{1+a}{1-a}-\frac{1-a}{1+a}}-\frac{1}{a}=$$

$$=\frac{\frac{(1+a)^2+2(1-a^2)+(1-a)^2}{1-a^2}}{\frac{(1+a)^2-(1-a)^2}{1-a^2}}-\frac{1}{a}=$$

$$=\frac{2+2a^2+2-2a^2}{4a}-\frac{1}{a}=\frac{1}{a}-\frac{1}{a}=0, -1<a<1, a\neq 0.$$

2. Vrijedi

$$x^3-x^{-3}=\left(x-x^{-1}\right)^3+3x^2\cdot x^{-1}-3x\cdot x^{-2}=$$

$$=\left(x-x^{-1}\right)^3+3\left(x-x^{-1}\right)=a^3+3a.$$

3. Jednačina ima bar jedan realan korijen ako vrijedi $D\geq 0,$ odnosno

$$(2a+7)^2-20(a-1)(2a+7)\geq 0.$$

Ova nejednačina je ekvivalentna nejednačini

$$(2a+7)(2a-3)\leq 0,$$

odakle se dobija $a\in\left[-\frac{7}{2},\frac{3}{2}\right].$

(Za $a=1$ jednačina se svodi linearnu jednačinu $9x+45=0,$ čije je rješenje $x=-5.$)

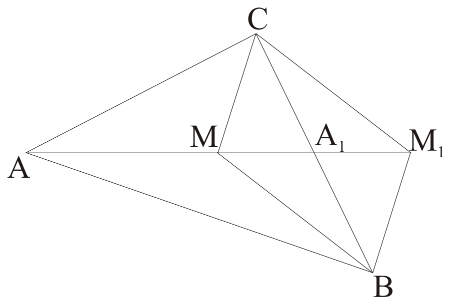
4. Data nejednačina je ekvivalentna nejednačini $\frac{3+2x}{2-x}+1<0,$ odnosno $\frac{x+5}{2-x}<0.$ Rješenje nejednačine je $x\in(-\infty,-5)\cup(2,\infty).$

5. Iz $x > 0 \wedge x-1 > 0 \wedge 2x+3 > 0$ dobijamo $x \in (1,\infty)$, i tada je jednačina ekvivalentna jednačini
$$\log x(x-1) = \log 2(2x+3),$$
odnosno jednačini
$$x^2 - x = 4x + 6.$$
Dobijamo kvadratnu jednačinu
$$x^2 - 5x - 6 = 0,$$
čija su rješenja $x_1 = -1, x_2 = 6$. Iz uslova $x \in (1,\infty)$ dobijamo da je rješenje date jednačine $x = 6$.

6. Data nejednačina je ekvivalentna slijedećim nejednačinama:
$$\frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x > \frac{1}{2},$$
$$\sin x \cos\frac{\pi}{3} + \cos x \sin\frac{\pi}{3} > \frac{1}{2},$$
$$\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) > \frac{1}{2},$$
pa je rješenje nejednačine $x + \frac{\pi}{3} \in \bigcup_{k\in Z}\left(\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi\right)$,
odnosno
$$x \in \bigcup_{k\in Z}\left(-\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right).$$

7. Pošto je $\gamma = \pi - \alpha - \beta$ i $\cos(\pi - \varphi) = -\cos\varphi$ dobijamo
$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma =$$
$$= \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2(\alpha+\beta) - 2\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha+\beta) =$$
$$= \cos^2\alpha + \cos^2\beta + (\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta)^2 -$$
$$- 2\cos\alpha\cos\beta(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) =$$
$$= \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\alpha\cos^2\beta - 2\cos\alpha\cos\beta\sin\alpha\sin\beta +$$
$$+ \sin^2\alpha\sin^2\beta - 2\cos^2\alpha\cos^2\beta + 2\cos\alpha\cos\beta\sin\alpha\sin\beta =$$
$$= \cos^2\alpha + \cos^2\beta - \cos^2\alpha\cos^2\beta + (1-\cos^2\alpha)(1-\cos^2\beta) =$$
$$= \cos^2\alpha + \cos^2\beta - \cos^2\alpha\cos^2\beta + 1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta + \cos^2\alpha\cos^2\beta =$$
$$= 1.$$

8. *Rješenje I:*



Neka je M proizvoljna tačka na težišnoj duži AA_1. Uzimajući na pravoj AA_1 tačku M_1 tako da je $MA_1 = A_1M_1$ dobijamo paralelogram MBM_1C. Pošto je u paralelogramu zbir kvadrata stranica jednak zbiru kvadrata dijagonala dobijamo

$$2\left(MB^2 + MC^2\right) = MM_1^2 + BC^2.$$

Dalje je $MM_1 = 2MA_1 = 2(AA_1 - MA)$ pa dobijamo

$$4(AA_1 - MA)^2 + BC^2 = 2\left(MB^2 + MC^2\right),$$

$$4AA_1^2 - 8AA_1 \cdot MA + 4MA^2 + BC^2 = 2\left(MB^2 + MC^2\right).$$

Odavde je

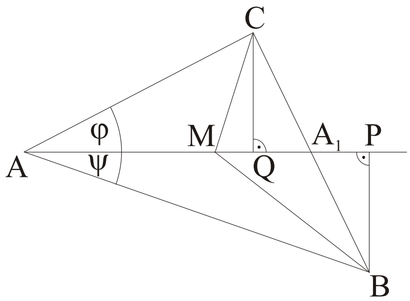
$$2\left(MB^2 + MC^2 + MA^2\right) = 6MA^2 - 8AA_1 \cdot MA + 4AA_1^2 + BC^2,$$

tj.

$$s = MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3\left(MA - \frac{2}{3}AA_1\right)^2 + \frac{2}{3}AA_1^2 + \frac{1}{2}BC^2.$$

Ovaj zbir će biti najmanji kada je $MA = \dfrac{2}{3}AA_1$, tj. ako je tačka M težište trougla.

Rješenje II:



Trouglovi QA_1C i A_1BP su podudarni pa je $A_1Q = A_1P$. Iz kosinusne teoreme imamo

$$MC^2 = MA^2 + AC^2 - 2AC \cdot AM\cos\varphi.$$

Dalje je $\cos\varphi = \dfrac{AQ}{AC}$, pa je $AC\cos\varphi = AQ$. Dakle

$$MC^2 = MA^2 + AC^2 - 2AQ \cdot AM.$$

Analogno je

$$MB^2 = MA^2 + AB^2 - 2AM \cdot AB\cos\psi, \quad \cos\psi = \frac{AP}{AB},$$

pa je

$$MB^2 = MA^2 + AB^2 - 2AM \cdot AP.$$

Prema tome

$$s = MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MA^2 + AC^2 + AB^2 - 2AM(AP + AQ).$$

Pošto je

$$AP + AQ = AA_1 + A_1P + AA_1 - A_1Q = 2AA_1,$$

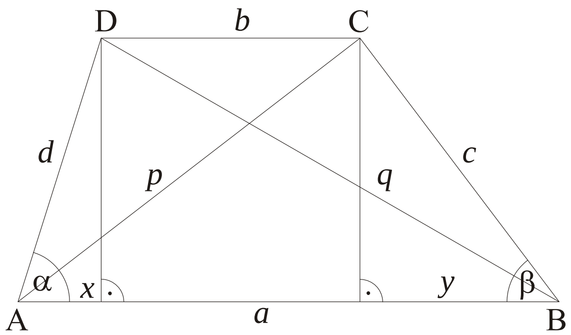
dobijamo

$$s = 3MA^2 - 4MA \cdot AA_1 + AC^2 + AB^2 =$$

$$= 3\left(MA - \frac{2}{3}AA_1\right)^2 + AC^2 + AB^2 - \frac{4}{3}AA_1^2.$$

Ovaj zbir će biti najmanji kada je $MA = \frac{2}{3}AA_1$, tj. ako je tačka M težište trougla.

9.



Primjenom kosinusne teoreme na trouglove ABC, ACD, ABD, BCD redom, dobijamo

$$p^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta,$$

$$p^2 = b^2 + d^2 - 2bd\cos(\pi - \alpha),$$

$$q^2 = a^2 + d^2 - 2ad\cos\alpha,$$

$$q^2 = c^2 + b^2 - 2bc\cos(\pi - \beta).$$

Pošto je $\cos(\pi - \varphi) = -\cos\varphi$, sabiranjem dobijamo

$$2(p^2 + q^2) = 2(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) -$$

$$- 2ac\cos\beta + 2bd\cos\alpha - 2ad\cos\alpha + 2bc\cos\beta$$

odnosno

$$(1) \quad p^2 + q^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - (a - b)(d\cos\alpha + c\cos\beta).$$

S druge strane, iz pravouglih trouglova AED i FBC imamo

$$\frac{x}{d} = \cos\alpha, \frac{y}{c} = \cos\beta,$$

pa je

$$d\cos\alpha + c\cos\beta = x + y = a - b.$$

Uvrštavanjem u (1) dobijamo

$$p^2 + q^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - (a-b)^2,$$

i nakon sređivanja

$$p^2 + q^2 = c^2 + d^2 + 2ab.$$

10. Neka je jednačina kružnice $(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2$. Pošto centar kružnice leži na pravoj $x + y = 0$, vrijedi $p + q = 0$, pa dobijamo jednačinu kružnice $(x-p)^2 + (y+p)^2 = r^2$. Pošto kružnica prolazi datim tačkama, dobijamo sistem jednačina

(1) $(-2-p)^2 + p^2 = r^2$

(2) $(1-p)^2 + (1+p)^2 = r^2$

Iz (1)-(2) dobijamo

$$3(1+2p) - (2p+1) = 0,$$

odnosno $p = -\dfrac{1}{2}$. Uvrštavanjem u (1) dobijamo $r = \dfrac{\sqrt{10}}{2}$.

Dakle, jednačina kružnice je

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{2}.$$

KVALIFIKACIONI ISPIT IZ MATEMATIKE
01.07.2002.

1. Uprostiti izraz
$$\left(\frac{2}{1+x}+\frac{x}{1-x^2}-\frac{x}{1-2x+x^2}\right):\frac{1-4x^2}{1-x-x^2+x^3}.$$

2. Pokazati da je $\sqrt{29-12\sqrt{5}}-\sqrt{29+12\sqrt{5}}$ cio broj. Koji je to broj?

3. Odrediti parametar m tako da zbir kubova korijena jednačine
$$x^2-x+m=0$$
bude jednak 10.

4. Riješiti nejednačinu
$$\sqrt{x^2-x+1}>x-1.$$

5. Riješiti nejednačinu
$$2\log_{\frac{1}{2}}|x|-\log_{\frac{1}{2}}(x+6)>0.$$

6. Riješiti sistem
$$2\log(x+y)=\log 9$$
$$3^{x^2}\cdot 9^y=3^9.$$

7. Riješiti jednačinu
$$\sin^2 2x+\sin^2 4x=1.$$

8. Ako za stranice a,b i ugao γ trougla vrijedi $a=2b\cos\gamma$ dokazati da je taj trougao jednakokraki.

9. Kružnice poluprečnika 2 i 1 dodiruju se spolja u tački T. Njihova zajednička unutrašnja tangenta siječe spoljašnju tangentu u tački A. Izračunati dužinu duži AT.

10. Odrediti jednačinu kružnice čiji je poluprečnik $r=3\sqrt{2}$, a prave
$$x+y-4=0 \text{ i } x-y+7=0$$
je tangiraju.

Rješenja:

1. Vrijedi

$$\left(\frac{2}{1+x}+\frac{x}{1-x^2}-\frac{x}{1-2x+x^2}\right):\frac{1-4x^2}{1-x-x^2+x^3}=$$

$$=\left(\frac{2}{1+x}+\frac{x}{(1-x)(1+x)}-\frac{x}{(1-x)^2}\right):\frac{(1-2x)(1+2x)}{1-x-x^2(1-x)}=$$

$$=\frac{2-4x+2x^2+x(1-x)-x(1+x)}{(1-x)^2(1+x)}:\frac{(1-2x)(1+2x)}{(1-x)(1-x^2)}=$$

$$=\frac{-4x+2}{(1-x)^2(1+x)}\cdot\frac{(1-x)^2(1+x)}{(1-2x)(1+2x)}=\frac{2(1-2x)}{(1-2x)(1+2x)}=$$

$$=\frac{2}{1+2x},\ x\neq\pm1, x\neq\pm\frac{1}{2}.$$

2. Neka je $m=\sqrt{29-12\sqrt{5}}-\sqrt{29+12\sqrt{5}}$. Očigledno je $m<0$. Kvadriranjem dobijamo

$$m^2=29-12\sqrt{5}-2\sqrt{29^2-\left(12\sqrt{5}\right)^2}+29+12\sqrt{5},$$

$$m^2=58-2\sqrt{121},$$

$$m^2=36.$$

Prema tome $m=-6$.

3. Na osnovu Vietovih formula je

$$x_1+x_2=1,\ x_1\cdot x_2=m.$$

Dalje je

$$x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)\left(x_1^2-x_1x_2+x_2^2\right)=$$

$$=(x_1+x_2)\left((x_1+x_2)^2-3x_1x_2\right)=1-3m.$$

Znači, $1-3m=10$, tj. $m=-3$.

4. Nejednačina je uvijek definisana jer je $x^2-x+1>0(\forall x\in R)$. Ako je $x-1<0$, vrijedi

$$\sqrt{x^2-x+1}\geq 0>x-1,$$

pa je rješenje nejednačine $x\in(-\infty,1)$.

Ako je $x-1\geq 0$, nakon kvadriranja dobijamo nejednačinu

$$x^2-x+1>x^2-2x+1,$$

čije je rješenje $x>0$, odnosno, uzimajući u obzir postavljeni uslov,

$$x\in[1,\infty).$$

Prema tome, rješenje nejednačine je svako $x\in R$.

5. Nejednačina je definisana za $|x|>0\wedge x+6>0$, tj. za

$$(1)\; x\neq 0\wedge x>-6.$$

Prema tome, za $x\in(-6,0)\cup(0,\infty)$ data nejednačina je ekvivalentna nejednačinama

$$\log_{\frac{1}{2}} x^2 > \log_{\frac{1}{2}}(x+6),$$

$$x^2<x+6,\;\; x^2-x-6<0.$$

Rješenje ove kvadratne nejednačine je $x\in(-2,3)$. Uzimajući u obzir (1) dobijamo rješenje nejednačine

$$x\in(-2,0)\cup(0,3).$$

6. Ako je $x+y>0$, dati sistem je ekvivalentan sistemu

$$\log(x+y)=\log 3$$

$$3^{x^2+2y}=3^9,$$

odnosno sistemu

$$x+y=3$$

$$x^2+2y=9.$$

Uvrštavajući y iz prve jednačine u drugu, dobijamo kvadratnu jednačinu

$$x^2-2x-3=0,$$

čija su rješenja $x_1=-1, x_2=3.$ Odavde se dobija $y_1=4,\; y_2=0$.

Oba rješenja zadovoljavaju uslov $x+y>0$, pa je rješenje sistema skup

$$\{(-1,4),(3,0)\}.$$

7. Data jednačina je ekvivalentna slijedećim jednačinama

$$\sin^2 2x+4\sin^2 2x\cos^2 2x=1,$$

$$\sin^2 2x+4\sin^2 2x-4\sin^4 2x=1,$$

$$4\sin^4 2x-5\sin^2 2x+1=0.$$

Stavljajući $\sin^2 2x = t,\ t \geq 0,$ dobijamo kvadratnu jednačinu

$$4t^2 - 5t + 1 = 0,$$

čija su rješenja $t_1 = 1,\ t_2 = \frac{1}{4}$. Odavde dobijamo

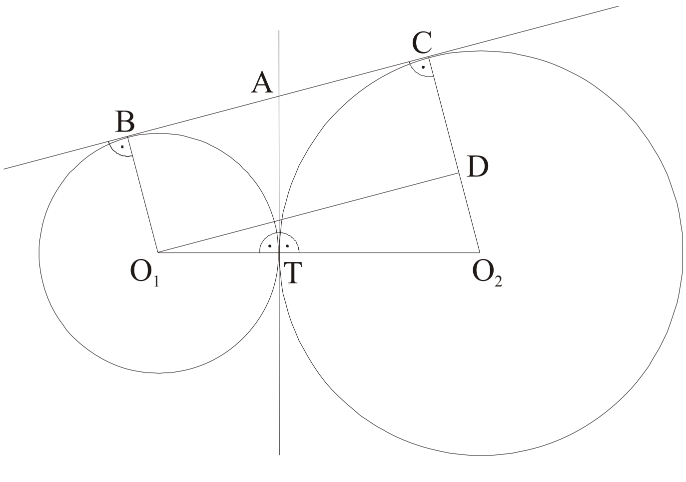
$$\sin 2x = \pm 1, \sin 2x = \pm\frac{1}{2},$$

pa su rješenja jednačine $x_k = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2},$

$$x_n = \frac{\pi}{12} + \frac{n\pi}{2},\ x_m = \frac{5\pi}{12} + \frac{m\pi}{2},\ k, n, m \in Z.$$

8. Iz kosinusne teoreme imamo $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$ i uvrštavajući da je $2b\cos\gamma = a,$ dobijamo $c^2 = a^2 + b^2 - a^2$, tj. $c = b$.

9.



Vrijedi $AC = AT = AB$ (tangentne duži), tj, $AT = \frac{1}{2}BC$. Dalje je $CB = O_1D$, pa iz pravouglog trougla O_1O_2D dobijamo $O_1D^2 = 3^2 - 1^2$, odnosno $O_1D = 2\sqrt{2}$.

Dakle, $AT = \sqrt{2}$.

10. Neka je jednačina kružnice $(x-p)^2+(y-q)^2=18$. Iz uslova dodira prave i kružnice $r^2(1+k^2)=(pk-q+n)^2$, dobijamo sistem

$$36=(-p-q+4)^2$$
$$36=(p-q+7)^2.$$

Razlikujemo 4 slučaja:

1° $\begin{matrix} -p-q+4=6 \\ p-q+7=6 \end{matrix}$;

rješenje ovog sistema je $p=-\frac{3}{2}, q=-\frac{1}{2}$, pa je jednačina kružnice

$$\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=18,$$

2° $\begin{matrix} -p-q+4=-6 \\ p-q+7=6 \end{matrix}$;

rješenje ovog sistema je $p=\frac{9}{2}, q=\frac{11}{2}$, pa je jednačina kružnice

$$\left(x-\frac{9}{2}\right)^2+\left(y-\frac{11}{2}\right)^2=18,$$

3° $\begin{matrix} -p-q+4=6 \\ p-q+7=-6 \end{matrix}$;

rješenje ovog sistema je $p=-\frac{15}{2}, q=\frac{11}{2}$, pa je jednačina kružnice

$$\left(x+\frac{15}{2}\right)^2+\left(y-\frac{11}{2}\right)^2=18,$$

4° $\begin{matrix} -p-q+4=-6 \\ p-q+7=-6 \end{matrix}$;

rješenje ovog sistema je $p=-\frac{3}{2}, q=\frac{23}{2}$, pa je jednačina kružnice

$$\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\left(y-\frac{23}{2}\right)^2=18.$$

KVALIFIKACIONI ISPIT IZ MATEMATIKE
01.07.2003.

1. Uprostiti izraz
$$\frac{9(2a+3)}{27-a^3}-\frac{3a}{a^2+3a+9}+\frac{a}{a-3}.$$

2. Dokazati da je
$$\left(4+\sqrt{15}\right)\left(\sqrt{10}-\sqrt{6}\right)\sqrt{4-\sqrt{15}}=2.$$

3. Odrediti za koje vrijednosti realnog parametra m su oba korijena jednačine $x^2-4x+2m=0$ pozitivna.

4. Riješiti jednačinu
$$4^x-3^{x-1}=3^{x+\frac{1}{2}}-2^{2x-1}.$$

5. Riješiti nejednačinu
$$\log\left(5^x+x-20\right)>x-x\log 2.$$

6. Riješiti jednačinu
$$\cos^3 x-\sin^3 x=\cos x-\sin x.$$

7. Izračunati uglove pravouglog trougla ako je razlika kateta jednaka $\frac{c\sqrt{2}}{2}$, gdje je c hipotenuza.

8. Stranica jednakostraničnog trougla je a. Oko njegovog težišta opisana je kružnica poluprečnika $\frac{a}{3}$. Odrediti površinu dijela trougla koji se nalazi van ove kružnice.

9. Neka su d_1 i d_2 dijagonale paralelograma i α ugao između njih. Odrediti površinu paralelograma.

10. Tačka $M(-1,3)$ je unutrašnja tačka kružnice $(x+3)^2+(y-5)^2=25$. Odrediti jednačinu najmanje tetive koja sadrži M.

Rješenja:

1. Vrijedi

$$\frac{9(2a+3)}{27-a^3}-\frac{3a}{a^2+3a+9}+\frac{a}{a-3}=$$

$$=\frac{9(2a+3)}{(3-a)(9+3a+a^2)}-\frac{3a}{a^2+3a+9}+\frac{a}{a-3}=$$

$$=\frac{18a+27-3a(3-a)-a(a^2+3a+9)}{(3-a)(a^2+3a+9)}=$$

$$=\frac{18a+27-9a+3a^2-a^3-3a^2-9a}{(3-a)(a^2+3a+9)}=$$

$$=\frac{27-a^3}{27-a^3}=1,\ a\neq 3.$$

2. Neka je $(4+\sqrt{15})(\sqrt{10}-\sqrt{6})\sqrt{4-\sqrt{15}}=m.$ Očigledno je $m>0$, pa nakon kvadriranja dobijamo

$$m^2=(4+\sqrt{15})^2(10-2\sqrt{60}+6)(4-\sqrt{15}),$$

odnosno

$$m^2=(4+\sqrt{15})(16-15)(16-2\sqrt{60})=4(4+\sqrt{15})(4-\sqrt{15})=4.$$

Dakle, $m=2$.

3. Da bi oba korjena jednačine bila pozitivna treba da budu ispunjeni uslovi

$$D\geq 0, x_1+x_2>0, x_1x_2>0\ .$$

Koristeći Vietove formule, odavde dobijamo sistem nejednačina

$$m>0,16-8m\geq 0\ .$$

Rješenje ovog sistema je $m\in(0,2]$.

4. Data jednačina je ekvivalentna sljedećim jednačinama:

$$4^x+4^{x-\frac{1}{2}}=3^{x+\frac{1}{2}}+3^{x-1},$$

$$4^{x-\frac{1}{2}}\left(4^{\frac{1}{2}}+1\right)=3^{x-\frac{1}{2}}\left(3+3^{-\frac{1}{2}}\right),$$

$$\left(\frac{4}{3}\right)^{x-\frac{1}{2}}=\frac{3\sqrt{3}+1}{3\sqrt{3}},$$

$$x-\frac{1}{2}=\log_{\frac{4}{3}}\frac{3\sqrt{3}+1}{3\sqrt{3}}.$$

Odavde dobijamo

$$x=\frac{1}{2}+\log_{\frac{4}{3}}\left(1+\frac{\sqrt{3}}{9}\right).$$

5. Uz uslov $5^x+x-20>0$, data nejednačina je ekvivalentna nejednačinama

$$\log\left(5^x+x-20\right)>\log 10^x-\log 2^x \ ,$$

$$\log\left(5^x+x-20\right)>\log 5^x .$$

Odavde je $5^x+x-20>5^x$, tj. $x>20.$ Rješenje nejednačine je

$$x\in\left(20,\infty\right) .$$

6. Data jednačina je ekvivalentna slijedećim jednačinama:

$$\left(\cos x-\sin x\right)\left(\cos^2 x+\cos x\sin x+\sin^2 x\right)-\left(\cos x-\sin x\right)=0,$$

$$\left(\cos x-\sin x\right)\left(1+\frac{1}{2}\sin 2x-1\right)=0,$$

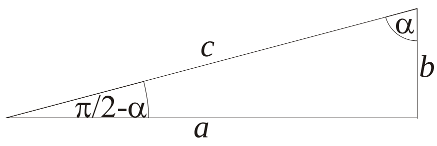
$$\left(\cos x-\sin x\right)\sin 2x=0.$$

Odavde dobijamo $\cos x-\sin x=0$ ili $\sin 2x=0,$
odnosno $tgx=1$ ili $\sin 2x=0.$
Rješenja jednačine su

$$x_k=\frac{\pi}{4}+k\pi,\ x_n=\frac{n\pi}{2},\ k,n\in Z.$$

7. Iz pravouglog trougla dobijamo

$$\sin\alpha=\frac{a}{c},\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\frac{b}{c},$$



odnosno

$$\sin\alpha-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\frac{a-b}{c}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Primjenjujući formulu za transformaciju razlike trigonometrijskih funkcija u proizvod dobijamo

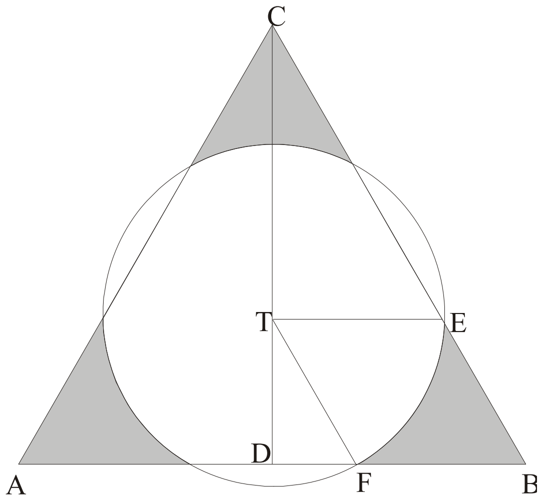
$$2\cos\frac{\pi}{4}\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

odnosno

$$\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}.$$

Odavde dobijamo $\alpha=\frac{5\pi}{12}, \beta=\frac{\pi}{12}$.

8.

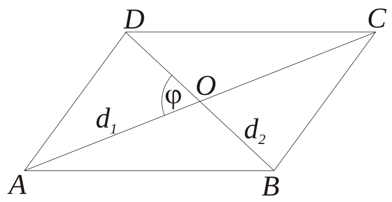


Jasno je da je $P=3P_1$, gdje je P_1 površina dijela trougla van kružnice sa tjemenom u B. Iz trugla DFT dobijamo $DF^2=\left(\frac{a}{3}\right)^2-\left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2$, tj. $DF=\frac{a}{6}$. Odavde se dobije da je $FB=\frac{a}{2}-\frac{a}{6}=\frac{a}{3}$, pa je četverougao FBET romb. Prema tome, $P_1=P_r-P_k$, gdje je P_r površina romba FBET, a P_k površina kružnog isječka FET, sa uglom 60°, pa je

$$P_1=\left(\frac{a}{3}\right)^2\sin 60^\circ-\frac{\left(\frac{a}{3}\right)^2\pi}{6}=\frac{a^2\sqrt{3}}{18}-\frac{a^2\pi}{54}.$$

Nakon sređivanja dobijamo $P=\frac{a^2}{18}\left(3\sqrt{3}-\pi\right)$.

9.



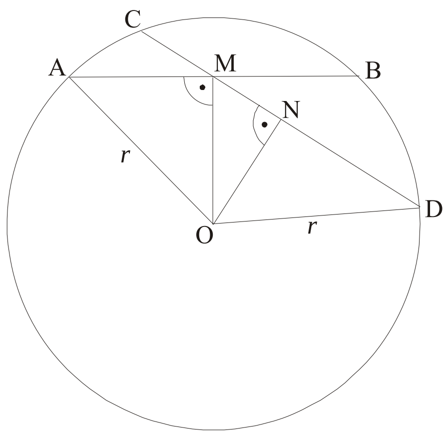
Površina trugla ABO je $P_1 = \frac{1}{2}\frac{d_1}{2}\cdot\frac{d_2}{2}\sin(\pi-\varphi) = \frac{d_1\cdot d_2}{8}\sin\varphi,$

a površina trougla BCO je $P_2 = \frac{1}{2}\frac{d_1}{2}\cdot\frac{d_2}{2}\sin\varphi = \frac{d_1\cdot d_2}{8}\sin\varphi.$

Prema tome, površina paralelograma je

$$P = 2(P_1 + P_2) = 2\cdot\frac{d_1\cdot d_2}{4}\sin\varphi = \frac{d_1\cdot d_2}{2}\sin\varphi.$$

10.



Najmanja tetiva kružnice je ona za koju je tačka M središte.Naime, neka je AB tetiva čije je središte tačka M i CD bilo koja tetiva koja sadrži M. Neka je N središte tetive CD. Iz pravouglog trugla ONM je očigledno $OM > ON$ (OM je hipotenuza a ON kateta). Iz trougla OMA imamo $\left(\frac{1}{2}AB\right)^2 = r^2 - OM^2$, a iz trougla OCN je $\left(\frac{1}{2}CD\right)^2 = r^2 - ON^2$. Odavde i iz nejednakosti $OM > ON$ dobijamo $AB < CD$ .Pošto je tetiva AB okomita na pravu određenu tačkama M i S imamo $k = -\frac{1}{k_{MS}}$, tj. $k = 1$. Prema tome, jednačina tražene prave je $y - 3 = x + 1$, tj. $x - y + 4 = 0$.

KVALIFIKACIONI ISPIT IZ MATEMATIKE 01.07.2004.

1. Uprostiti izraz $\dfrac{a^3-b^3}{a+b-\dfrac{ab}{a+b}}-\dfrac{a^3+b^3}{a-b+\dfrac{ab}{a-b}}$.

2. Riješiti nejednačinu $|2x+5|>-x+2$.

3. Riješiti jednačinu $\sqrt{\dfrac{x-5}{x+2}}+\sqrt{\dfrac{x-4}{x+3}}=\dfrac{7}{x+2}\sqrt{\dfrac{x+2}{x+3}}$.

4. Riješiti jednačinu $\log_2\left(9-2^x\right)=3-x$.

5. Riješiti sistem

$$\begin{aligned} 27^{2x+1} &= 243\cdot 3^{-4y-1} \\ 4\cdot 4^{y-x} &= \sqrt{16^{-2y+1}} \end{aligned}.$$

6. Dokazati identitet $\dfrac{1+\sin 2\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}=\sqrt{2}\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)$.

7. Riješiti jednačinu $3+5\sin 2x=\cos 4x$.

8. Dokazati da je $2t_a^2=b^2+c^2-\dfrac{1}{2}a^2$,
   gdje su a,b,c stranice trougla ABC, a t_a težišnica iz vrha A.

9. Osnovice jednakokrakog trapeza razlikuju se za 10, krak je aritmetička sredina osnovica, a visina $2/3$ duže osnovice. Naći površinu trapeza.

10. Prava $y=kx$ siječe kružnicu $(x-1)^2+y^2=1$ u tačkama A i B. Odrediti koordinate tačaka A i B i izračunati k ako je $\overline{AB}=\sqrt{2}$.

Rješenja:

1. Vrijedi

$$\frac{a^3-b^3}{a+b-\frac{ab}{a+b}}-\frac{a^3+b^3}{a-b+\frac{ab}{a-b}}=\frac{a^3-b^3}{\frac{(a+b)^2-ab}{a+b}}-\frac{a^3+b^3}{\frac{(a-b)^2+ab}{a-b}}=$$

$$=\frac{(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)(a+b)}{a^2+ab+b^2}-\frac{(a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)(a-b)}{a^2-ab+b^2}=$$

$$=a^2-b^2-\left(a^2-b^2\right)=0, \quad \text{uz uslov} \quad a\neq \pm b.$$

2. Za $x\in\left(-\infty,-\frac{5}{2}\right)$ data nejednačina je ekvivalentna nejednačini $-2x-5>-x+2$, tj. nejednačini $x<-7$, pa je u ovom slučaju rješenje $x\in(-\infty,-7)$.

Za $x\in\left[-\frac{5}{2},\infty\right)$ data nejednačina je ekvivalentna nejednačini $2x+5>-x+2$, tj. nejednačini $x>-1$, pa u ovom slučaju rješenje $x\in(-1,+\infty)$.

Dakle, rješenje nejednačine je $x\in(-\infty,-7)\cup(-1,\infty)$.

3. Iz uslova $\frac{x-5}{x+2}\geq 0\wedge\frac{x-4}{x+3}\geq 0\wedge\frac{x+2}{x+3}\geq 0$ dobijamo da je jednačina definisana za $x\in(-\infty,-3)\cup[5,\infty)$. Uz uslov $x+2>0$, nakon kvadriranja i sređivanja dobijamo ekvivalentnu jednačinu

$$\sqrt{\frac{(x-5)(x-4)}{(x+2)(x+3)}}=\frac{-x^2+2x+36}{(x+2)(x+3)}.$$

Pošto je $(x+2)(x+3)>0$ mora biti i $-x^2+2x+36\geq 0$, odakle dobijamo (uz gornja ograničenja) da $x\in\left[5,1+\sqrt{37}\right]$. Kvadriranjem i sređivanjem dobijamo kvadratnu jednačinu $x^2-2x-24=0$, čija su rješenja $x_1=6$ i $x_2=-4$. Rješenje $x=6$ pripada definicionom području jednačine i to je jedino rješenje jednačine.

4. Iz uslova $9-2^x>0$ dobijamo da je za $x<\log_2 9$ data jednačina ekvivalentna jednačini $9-2^x=2^{3-x}$. Smjenom $2^x=t,\quad t>0$ dobijamo kvadratnu jednačinu $t^2-9t+8=0$, čija su rješenja $t_1=1$ i $t_2=8$. Odavde dobijamo $2^x=1$, odnosno $2^x=8$, pa su rješenja jednačine $x\in\{0,3\}$.

5. Vrijedi

$$\begin{array}{l} 27^{2x+1}=243\cdot 3^{-4y-1} \\ 4\cdot 4^{y-x}=\sqrt{16^{-2y+1}} \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l} 3^{3(2x+1)}=3^{5-4y-1} \\ 4^{1+y-x}=4^{-2y+1} \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l} 6x+4y=1 \\ -x+3y=0 \end{array}.$$

Rješenje sistema je $(x,y)=\left(\frac{3}{22},\frac{1}{22}\right)$.

6. Vrijedi

$$\frac{1+\sin 2\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}=\frac{\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}=\frac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}{\sin\alpha+\cos\alpha}=$$

$$=\sin\alpha+\cos\alpha=\sin\alpha+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=2\sin\frac{\pi}{4}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=$$

$$=\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right),$$

uz uslov $\sin\alpha+\cos\alpha\neq 0$, tj. $\alpha\neq-\frac{\pi}{4}+k\pi,\quad k\in Z$.

7. Data jednačina je ekvivalentna jednačini $3+5\sin 2x=\cos^2 2x-\sin^2 2x$, tj. jednačini $2\sin^2 2x+5\sin 2x+2=0$.
Smjenom $\sin 2x=t,\quad t\in[-1,1]$ dobijamo kvadratnu jednačinu $2t^2+5t+2=0$, čija su rješenja $t_1=-2$ i $t_2=-\frac{1}{2}$.
Zbog ograničenja za t ($x\to\sin 2x$ je ograničena funkcija) uzimamo samo rješenje t_2. Jednačina $\sin 2x=-\frac{1}{2}$ ima rješenja

$$x_k=-\frac{\pi}{12}+k\pi,\quad x_n=\frac{7\pi}{12}+n\pi,\quad k,n\in Z.$$

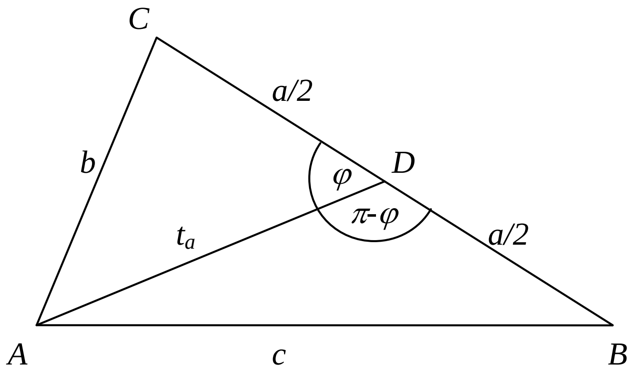
8. Iz trougla ADC imamo

$$b^2 = t_a{}^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - 2\cdot\frac{a}{2}\cdot t_a\cos\varphi, \quad \text{tj} \quad (1)\ b^2 = t_a{}^2 + \frac{a^2}{4} - a\cdot t_a\cos\varphi.$$

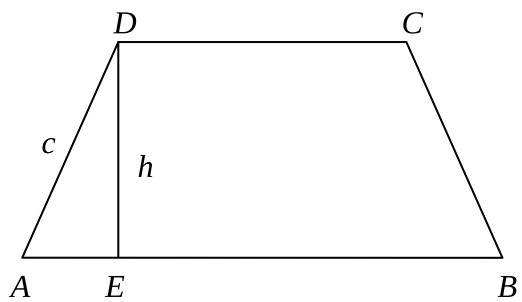
Analogno iz trougla ABD dobijamo

$$c^2 = t_a{}^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - 2\cdot\frac{a}{2}\cdot t_a\cos(\pi-\varphi), \quad \text{tj.}\ (2)\ c^2 = t_a{}^2 + \frac{a^2}{4} + a\cdot t_a\cos\varphi.$$

Sabiranjem (1) i (2) dobijamo $2t_a^2 = b^2 + c^2 - \frac{1}{2}a^2$.

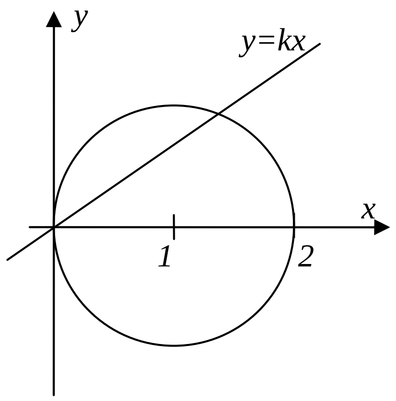


9. Iz $a-b=10 \wedge c=\dfrac{a+b}{2}$ dobijamo $c=a-5$. Primjenjujući Pitagorinu teoremu na trougao AED dobijamo $(a-5)^2 = 5^2 + \left(\frac{2}{3}a\right)^2$, odakle je $a=18$.



Dalje je $b=8$, $h=12$, pa je $P=156$.

10. Odredimo koordinate presječnih tačaka prave i kružnice. Iz jednačine $(x-1)^2 + k^2x^2 = 1$ dobijamo $x_1 = 0,\quad x_2 = \dfrac{2}{1+k^2}$.



Odavde je $A(0,0)$ i $B\left(\dfrac{2}{1+k^2}, \dfrac{2k}{1+k^2}\right)$. Iz uslova $\overline{AB} = \sqrt{2}$ dobijamo

$\dfrac{4}{(1+k^2)^2} + \dfrac{4k^2}{(1+k^2)^2} = 2$, pa je $k^2 = 1$, tj. $k = \pm 1$.

Dakle, prave $y = x$ i $y = -x$ odsjecaju na kružnici $(x-1)^2 + y^2 = 1$ tetivu dužine $\sqrt{2}$.

KVALIFIKACIONI ISPIT IZ MATEMATIKE 06.09.2004.

1. Uprostiti izraz $\frac{xy}{x+y}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)-\frac{xy}{x-y}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right).$

2. Riješiti nejednačinu $|2x+3|\le -x+5$.

3. Odrediti za koje vrijednosti realnog parametra m jednačina
$$8\left(x^2-1\right)=(m-2)x-m$$
ima jednake korijene.

4. Riješiti jednačinu $4^x+4^{x+1}+4^{x+2}=7^{x+1}-7^{x-1}$.

5. Riješiti sistem
$$\begin{aligned} 4^{\log x}+3^{\log y}&=19\\ 4^{2\log x}-3^{2\log y}&=247\end{aligned}.$$

6. Riješiti jednačinu $4\sin^2 x\cos x-3\cos x=0$.

7. Stranica romba je $a=5$, a zbir dijagonala $d_1+d_2=14$. Odrediti površinu romba.

8. Naći uglove trougla čije su stranice date jednačinama $a^2+b^2=36$, $a^2-b^2=18$, $b:c=1:2$.

9. Visina i težišna linija povučene iz tjemena C trougla ABC dijele ugao kod tjemena C na tri jednaka dijela. Odrediti uglove trougla ABC .

10. Naći jednačinu prave koja sadrži tačku M(3,1) i čiji je odsječak na x osi dva puta veći nego na y osi.

Rješenja:

1. Vrijedi

$$\frac{xy}{x+y}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)-\frac{xy}{x-y}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)=\frac{xy}{x+y}\cdot\frac{y+x}{xy}-\frac{xy}{x-y}\cdot\frac{y-x}{xy}=$$

$$=1-(-1)=2$$

ako je $x\neq 0,\quad y\neq 0,\quad x\neq \pm y$.

2. Za $x\in\left[-\infty,-\frac{3}{2}\right)$ data nejednačina je ekvivalentna sa $-2x-3\leq -x+5$,

tj. sa $x\geq -8$ pa je u ovom slučaju rješenje $x\in\left[-8,-\frac{3}{2}\right)$.

Za $x\in\left[-\frac{3}{2},\infty\right)$ data nejednačina je ekvivalentna sa $2x+3\leq -x+5$,

tj. sa $x\leq\frac{2}{3}$, pa u ovom slučaju rješenje $x\in\left[-\frac{3}{2},\frac{2}{3}\right]$.

Dakle, rješenje nejednačine je $x\in\left[-8,\frac{2}{3}\right]$.

3. Da bi jednačina $8x^2-(m-2)x+m-8=0$ imala jednake korijene mora biti ispunjen uslov $D=0$, tj. $(m-2)^2-32(m-8)=0$. Odavde dobijamo kvadratnu jednačinu $m^2-36m+260=0$, čija su rješenja $m_1=10$ i $m_2=26$.

4. Data jednačina je ekvivalentna sa

$$4^{x-1}\left(4+4^2+4^3\right)=7^{x-1}\left(7^2-1\right)$$

odakle dobijamo

$$\left(\frac{4}{7}\right)^{x-1}=\frac{48}{84}=\frac{4}{7},$$

pa je $x-1=1$, tj. $x=2$.

5. Ako uvedemo smjenu $4^{\log x} = u,\quad 3^{\log y} = v$, uz uslov $x > 0, y > 0$, dobijamo sistem

$$(1)\qquad u + v = 19$$
$$(2)\qquad u^2 - v^2 = 247.$$

Iz (2) imamo $(u - v)(u + v) = 247$, pa koristeći (1) dobijamo $u - v = 13$.
Dakle

$$u + v = 19$$
$$u - v = 13$$

odakle lako dobijamo da je $u = 16,\quad v = 3$.
Vraćajući se na smjenu dolazimo do

$$4^{\log x} = 16,\quad 3^{\log y} = 3,\ \text{tj.}\quad \log x = 2,\quad \log y = 1.$$

Rješenje sistema je $(x, y) = (100,10)$.

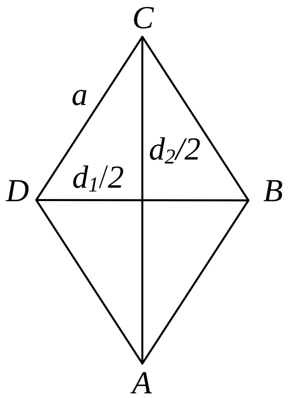
6. Data jednačina je ekvivalentna jednačini $\cos x(4\sin^2 x - 3) = 0$, odakle dobijamo $\cos x = 0 \vee \sin x = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Rješenja jednačine su $x_k = 2k\pi,\quad x_n = \pm\dfrac{\pi}{3} + n\pi,\quad k, n \in Z$.

7. Za površinu romba koristimo formulu $P = \dfrac{d_1 d_2}{2}$.

Pošto je $a^2 = \left(\dfrac{d_1}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{d_2}{2}\right)^2$ dobijamo $4a^2 = (d_1 + d_2)^2 - 2d_1 d_2$.

Uvrštavajući $d_1 + d_2$ i a dobijamo $d_1 d_2 = 48$, tj. $P = 24$.



8. Za stranice trugla vrijedi

(1) $a^2 + b^2 = 36$

(2) $a^2 - b^2 = 18$

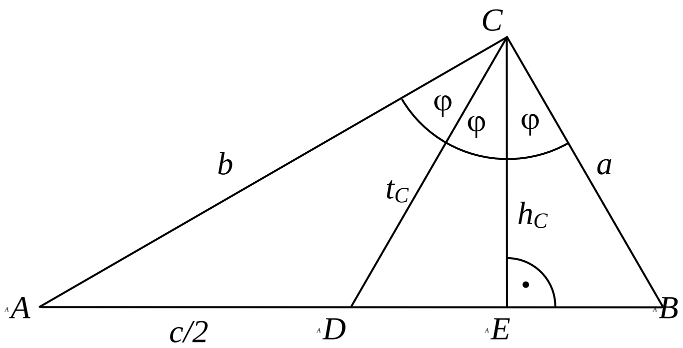
(3) $b : c = 1 : 2$.

Sabiranjem (1) i (2) dobijamo $2a^2 = 54$, tj. $a = 3\sqrt{3}$. Sada se lako dobija $b = 3$, a zatim iz (3) $c = 6$. Primjenom kosinusne teoreme dobijamo

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \text{ pa je } \alpha = \frac{\pi}{3}.$$

Analogno dibijamo $\beta = \frac{\pi}{6}$ i $\chi = \frac{\pi}{2}$.

9. Uočimo da je trougao DBC jednakokraki. (Visina h_c je ujedno i simetrala ugla.) Odavde je $DE = EB$ i pošto je $DB = \frac{c}{2}$, dobijamo $DE = EB = \frac{c}{4}$.



Prema tome $AE = \frac{3c}{4}$. Iz trougla EBC imamo $tg\varphi = \frac{c}{4h_c}$, a iz trougla AEC je $tg2\varphi = \frac{3c}{4h_c}$. Stavljajući $\frac{c}{4h_c} = x$ i primjenjujući formulu za tangens dvostrukog ugla $tg2\varphi = \frac{2tg\varphi}{1 - tg^2\varphi}$, dobijamo $3x = \frac{2x}{1 - x^2}$, odakle je $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Dakle, $tg\varphi = \frac{1}{\sqrt{3}}$, pa je $\varphi = \frac{\pi}{6}$. Prema tome, ugao $\chi = \frac{\pi}{2}$.

Pošto je trougao DBC jednakokraki i ugao u C jednak 2φ, tj. $\frac{\pi}{3}$, zaključujemo da je taj trougao jednakostranični, pa je ugao $\beta = \frac{\pi}{3}$.

10. Pošto je odsječak na x osi dva puta veći nego na y osi, možemo zapisati jednačinu prave u segmentnom obliku

$$\frac{x}{2m} + \frac{y}{m} = 1.$$

Pošto prava sadrži tačku M, dobijamo $\frac{3}{2m} + \frac{1}{m} = 1$ pa je $m = \frac{5}{2}$.

Jednačina prave je $x + 2y - 5 = 0$.

KVALIFIKACIONI ISPIT IZ MATEMATIKE
01.07.2005.

1. Pokazati da je

$$\left(\frac{\sqrt{1+a}}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}}+\frac{1-a}{\sqrt{1-a^2}-1+a}\right)\left(\frac{1}{a}-\sqrt{\frac{1}{a^2}-1}\right)=1, \qquad 0<a<1.$$

2. Odrediti koeficijente kvadratne jednačine $x^2+px+q=0$ tako da njeni korijeni budu p i q.

3. Riješiti nejednačinu $\frac{1}{x-3}\le\frac{2x+1}{x^2-3x+2}+\frac{3x+2}{x^2-4x+3}$.

4. Riješiti jednačinu $9^x-4^x=3\left(3^{2x}-6^x\right)$.

5. Riješiti jednačinu $\log_2\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}-1}\right)=\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}+\log_2\left(1-\frac{2}{\sqrt{x}+2}\right)$.

6. Riješiti jednačinu $\cos x=\sqrt{\frac{1+\sin x}{2}}$.

7. Dokazati identitet $\frac{\cos 2x}{ctg^2x-tg^2x}=\frac{1}{4}\sin^2 2x$.

8. Izračunati stranice i uglove trougla ako je stranica a jednaka poluprečniku, a stranica b prečniku opisane kružnice i visina h_c jednaka 3.

9. U romb čija je stranica a i oštri ugao $\frac{\pi}{3}$ upisana je kružnica. Odrediti površinu pravougaonika čiji vrhovi leže u tačkama dodira kružnice sa stranicama romba.

10. Odrediti jednačinu sječice konstruisane iz tačke A(15,-5) na kružnicu $x^2+y^2=50$ tako da dužina odgovarajuće tetive iznosi 10.

Rješenja:

1. Vrijedi

$$\left(\frac{\sqrt{1+a}}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}}+\frac{1-a}{\sqrt{1-a^2}-1+a}\right)\left(\frac{1}{a}-\sqrt{\frac{1}{a^2}-1}\right)=$$

$$=\left(\frac{\sqrt{1+a}}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}}+\frac{1-a}{\sqrt{1-a}\cdot\sqrt{1+a}-(1-a)}\cdot\right)\left(\frac{1}{a}-\sqrt{\frac{1-a^2}{a^2}}\right)=$$

$$=\left(\frac{\sqrt{1+a}}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}}+\frac{(\sqrt{1-a})^2}{\sqrt{1-a}\left(\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}\right)}\right)\cdot\frac{1-\sqrt{1-a^2}}{a}=$$

$$=\frac{\sqrt{1+a}+\sqrt{1-a}}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}}\cdot\frac{1-\sqrt{1-a^2}}{a}=$$

$$=\frac{\left(\sqrt{1+a}+\sqrt{1-a}\right)^2}{2a}\cdot\frac{1-\sqrt{1-a^2}}{a}=$$

$$\frac{2\left(1+\sqrt{1-a^2}\right)}{2a}\cdot\frac{1-\sqrt{1-a^2}}{a}=\frac{1-\left(1-a^2\right)}{a^2}=1,\qquad 0<a<1.$$

2. Iz Vietovih formula dobijamo $p+q=-p\wedge pq=q$. Iz druge jednačine dobijamo $q=0\vee p=1$. Za $q=0$ dobijamo $p=0$, dok za $p=1$ dobijamo $q=-2$.

3. Iz uslova $x-3\neq 0\wedge x^2-3x+2\neq 0\wedge x^2-4x+3\neq 0$ dobijamo da je nejednačina definisane za $x\in R\setminus\{1,2,3\}$. Data nejednačina je ekvivalentna sa

$$\frac{(2x+1)(x-3)+(3x+2)(x-2)-(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)(x-3)}\geq 0,$$

odakle sređivanjem dobijamo $\dfrac{4x^2-6x-9}{(x-1)(x-2)(x-3)}\geq 0$.

Rješenje ove nejednačine je $x\in\left[\frac{3-3\sqrt{5}}{4},1\right)\cup\left(2,\frac{3+3\sqrt{5}}{4}\right]\cup(3,+\infty)$.

4. Nakon dijeljenja sa 6^x dobijamo jednačinu

$$\left(\frac{3}{2}\right)^x - \left(\frac{2}{3}\right)^x = 3\left(\frac{3}{2}\right)^x - 3.$$

Nakon smjene $\left(\frac{3}{2}\right)^x = t,\ \ t > 0$ data jednačina postaje $2t + \frac{1}{t} - 3 = 0$, tj. $2t^2 - 3t + 1 = 0$. Rješenja ove jednačine su $t_1 = \frac{1}{2},\ t_2 = 1$, odakle dobijamo rješenja polazne jednačine $x = \log_{\frac{3}{2}} \frac{1}{2}$ i $x = 0$.

5. Iz uslova $\sqrt{x} - 1 \neq 0 \wedge x \geq 0 \wedge 1 + \frac{1}{\sqrt{x} - 1} > 0 \wedge 1 - \frac{2}{\sqrt{x} + 2} > 0$ dobijamo da je jednačina definisana za $x > 1$. Imamo

$$\log_2 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} - \log_2 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 2} = 2 \Leftrightarrow \log_2 \frac{\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1}}{\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 2}} = 2$$

pa je $\frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} - 1} = 4$. Rješenje jednačine je $x = 4$.

6. Pošto je $1 + \sin x \geq 0$ za svaki realan broj, uz uslov $\cos x \geq 0$, nakon kvadriranja dobijamo jednačinu $2\cos^2 x = 1 + \sin x$, odnosno jednačinu $2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$.

Stavljajući $\sin x = t,\ \ t \in [-1,1]$ dobijamo kvadratnu jednačinu

$2t^2 + t - 1 = 0$, čija su rješenja $t_1 = -1,\ t_2 = \frac{1}{2}$.

Za $\sin x = -1$ dobijamo $x_k = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, a za $\sin x = \frac{1}{2}$, uz uslov $\cos x \geq 0$, dobijamo $x_n = \frac{\pi}{6} + 2n\pi,\ \ k, n \in Z$.

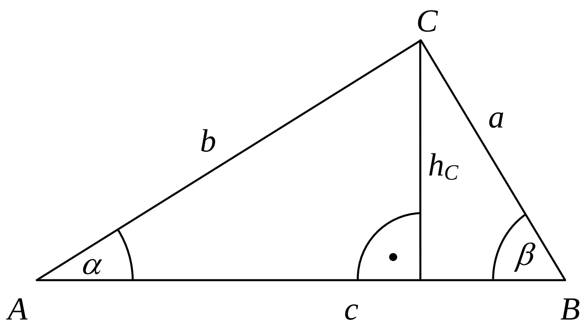
7. Vrijedi

$$\frac{\cos 2x}{ctg^2 x - tg^2 x} = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{\sin^2 x \cos^2 x\left(\cos^2 x - \sin^2 x\right)}{\cos^4 x - \sin^4 x} =$$

$$= \frac{\sin^2 x \cos^2 x\left(\cos^2 x - \sin^2 x\right)}{\left(\cos^2 x - \sin^2 x\right)\left(\cos^2 x + \sin^2 x\right)} = \sin^2 x \cos^2 x = \frac{1}{4}\sin^2 2x,$$

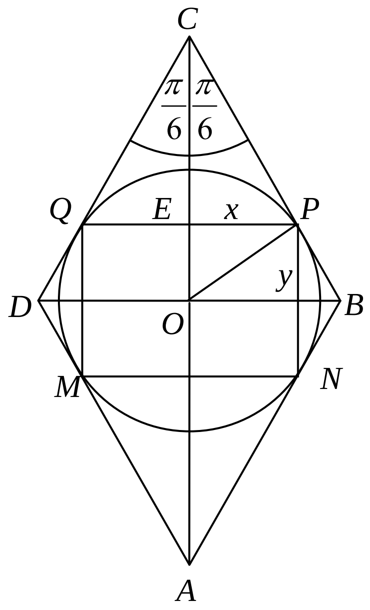
uz uslov $\sin x \neq 0 \wedge \cos x \neq 0 \wedge \cos x \neq \pm \sin x$.

8. Iz sinusne teoreme imamo $\frac{b}{\sin\beta} = 2R$, tj $\sin\beta = 1$, pa je $\beta = \frac{\pi}{2}$. Takođe je $\frac{a}{\sin\alpha} = 2R$, pa je $\sin\alpha = \frac{1}{2}$, $\alpha = \frac{\pi}{6}$. Odavde dobijamo da je $\chi = \frac{\pi}{3}$.



Iz pravouglog trougla ADC dobijamo $\sin\alpha = \frac{h_c}{b}$, pa je $b = 6$. Sada lako dobijamo da je $a = 3$ i $c = 3\sqrt{3}$.

9. Površina pravougaonika je $P = 4xy$. Trougao DBC je jednakostranični pa je $DB = a$ i $OC = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Trougao OPC je pravougli pa je $\frac{OP}{OC} = \sin\frac{\pi}{6}$, odakle dobijamo $OP = \frac{a\sqrt{3}}{4}$.



Pošto je x visina pravouglog trougla OPC, vrijedi

$$(1) \qquad x^2 = OE \cdot EC = y \cdot EC.$$

Iz pravouglog trougla EPC je $\frac{x}{EC} = tg\frac{\pi}{6}$, pa je $EC = \sqrt{3}x$. Uvrštavajući u (1) dobijamo $x = y\sqrt{3}$. Sada primjenom Pitagorine teoreme na trougao OPE dobijamo $x^2 + y^2 = OP^2$, tj. $4y^2 = \frac{3a^2}{16}$.

Dobijamo $y = \frac{a\sqrt{3}}{8}$, $\quad x = \frac{3a}{8}$.

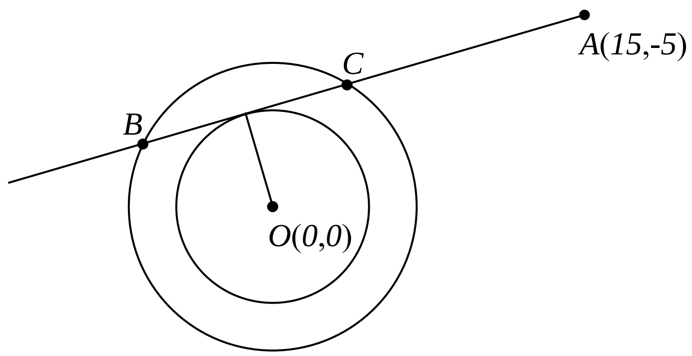
Površina je $P = \frac{3a^2\sqrt{3}}{16}$.

10. Sječice na kružnicu su tangente na koncentričnu kružnicu, poluprečnika $50 - \left(\frac{10}{2}\right)^2$, tj. na kružnicu $x^2 + y^2 = 25$. Iz uslova da sječica sadrži tačku A(15,-5) i uslova dodira prave i kružnice dobijamo sistem

$$-5 = 15k + n \wedge 25(k^2 + 1) = n^2,$$

odakle dobijamo jednačinu $8k^2 + 6k = 0$, čija su rješenja 0 i $-\frac{3}{4}$.

Jednačine sječica su $y + 5 = 0$ i $3x + 4y - 25 = 0$.



KVALIFIKACIONI ISPIT IZ MATEMATIKE
05.09.2005.

1. Uprostiti izraz
$$\left(\frac{a^2}{a+b}-\frac{a^3}{a^2+2ab+b^2}\right):\left(\frac{a}{a+b}-\frac{a^2}{a^2-b^2}\right).$$

2. Riješiti nejednačinu $\frac{x-1}{x+1}\le 2$.

3. Odrediti za koje vrijednosti realnog parametra m jednačina
$$8x^2-(m-2)x+m-8=0$$
ima pozitivne korijene.

4. Riješiti jednačinu $3^{2x}-4\cdot 3^x+3=0$.

5. Riješiti jednačinu $\log 10+\frac{1}{3}\log\left(271+3^{\sqrt{5x}}\right)=2$.

6. Odrediti $x\in(0,2\pi)$ tako da vrijedi $\frac{2}{\sin x}-\sin x=\frac{5}{2}ctgx$.

7. U jednakokrakom trapezu sa paralelnim stranicama a i b dijagonale se sijeku pod pravim uglom. Odrediti dužinu kraka.

8. Naći uglove trougla čije su stranice date jednačinama
$$b^2+c^2=36,\ b^2-c^2=18,\ c:a=1:2.$$

9. Visina i težišna linija povučene iz tjemena C trougla ABC dijele ugao kod tjemena C na tri jednaka dijela. Odrediti uglove trougla ABC .

10. Naći jednačinu prave koja sadrži tačku M(1,3) i čiji je odsječak na y osi dva puta veći nego na x osi.

Rješenja:

1. Vrijedi

$$\left(\frac{a^2}{a+b}-\frac{a^3}{a^2+2ab+b^2}\right):\left(\frac{a}{a+b}-\frac{a^2}{a^2-b^2}\right)=$$

$$=\left(\frac{a^2}{a+b}-\frac{a^3}{(a+b)^2}\right):\left(\frac{a}{a+b}-\frac{a^2}{(a-b)(a+b)}\right)=$$

$$=\frac{a^2(a+b)-a^3}{(a+b)^2}:\frac{a(a-b)-a^2}{(a+b)(a-b)}=\frac{a^2b}{(a+b)^2}\cdot\frac{(a+b)(a-b)}{-ab}=$$

$$=-\frac{a(a-b)}{a+b},\quad \text{uz uslove } a\neq\pm b,\quad a\neq 0,\quad b\neq 0.$$

2. Vrijedi $\frac{x-1}{x+1}\leq 2 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x+1}-2\leq 0 \Leftrightarrow \frac{-x-3}{x+1}\leq 0$,
odakle dobijamo $x\in(-\infty,-3]\cup(-1,+\infty)$.

3. Da bi jednačina imala pozitivne korijene, mora biti diskriminanta nenegativna i zbir i proizvod korijena pozitivni. Dakle,

$$D\geq 0\wedge x_1+x_2>0\wedge x_1x_2>0\ .$$

Koristeći Vietove formule dobijamo sistem nejednačina

$$(m-2)^2-32(m-8)\geq 0\wedge\frac{m-2}{8}>0\wedge\frac{m-8}{8}>0.$$

Iz prve nejednačine je $m^2-36m+260\geq 0$, tj. $m\in(-\infty,10]\cup[26,+\infty)$, dok iz druge i treće nejednačine dobijamo $m\in(8,+\infty)$. Prema tome, korijeni jednačine će biti pozitivni za $m\in(8,10]$.

4. Uvodeći smjenu $3^x=t,\ t>0$ dobijamo kvadratnu jednačinu $t^2-4t+3=0$, čija su rješenja $t_1=1,t_2=3$. Odavde dobijamo rješenja polazne jednačine $x=0$ i $x=1$.

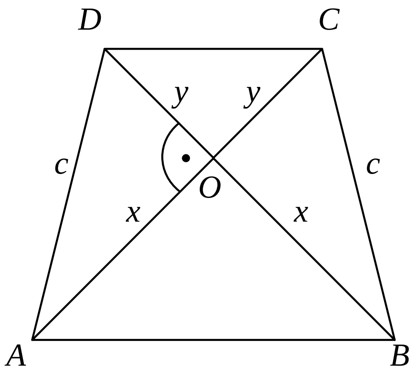
5. Jednačina je definisana za $x\geq 0$ (jer je $271+3^{\sqrt{5x}}>0$). Imamo

$$\log 10+\frac{1}{3}\log\left(271+3^{\sqrt{5x}}\right)=2\Leftrightarrow\log\left(271+3^{\sqrt{5x}}\right)=3\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 271+3^{\sqrt{5x}}=1000\Leftrightarrow 3^{\sqrt{5x}}=3^6\Leftrightarrow\sqrt{5x}=6,\ \text{tj. } x=\frac{36}{5}.$$

6. Nakon množenja sa $\sin x$ $(\sin x \neq 0)$ i sređivanja dobijamo jednačinu $2\cos^2 x - 5\cos x + 2 = 0$, koja se smjenom $\cos x = t$, $t \in [-1,1]$, svodi na kvadratnu jednačinu $2t^2 - 5t + 2 = 0$. Rješenja ove jednačine su $t_1 = 2$, $t_2 = \frac{1}{2}$. Zbog uslova $t \in [-1,1]$, odbacujemo rješenje t_1, pa tražimo rješenja jednačine $\cos x = \frac{1}{2}$ koja pripadaju intervalu $(0,2\pi)$. Dobijamo $x \in \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}$.

7. Pošto je trougao ABO jednakokrako pravougli, ugao OAB je $\frac{\pi}{4}$ pa je $x = \frac{a}{\sqrt{2}}$. Analogno dobijamo da je $y = \frac{b}{\sqrt{2}}$. Iz pravouglog trougla AOD imamo $c^2 = x^2 + y^2$, pa je $c = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$.



8. Vidjeti zadatak 8. od 06.09.2004.

9. Vidjeti zadatak 9. od 06.09.2004.

10. Kao i u zadatku 10. od 06.09.2004. imamo

$$\frac{x}{m} + \frac{y}{2m} = 1 \wedge \frac{1}{m} + \frac{3}{2m} = 1$$

odakle dobijamo $m = \frac{5}{2}$, pa je jednačina prave $2x + y - 5 = 0$.

KVALIFIKACIONI ISPIT IZ MATEMATIKE
04.07.2006.

1. Uprostiti izraz
$$\left(-\frac{1}{a+b}-\frac{1}{a^3-b^3}:\frac{1}{a^2+ab+b^2}\right)\cdot\frac{a^2-b^2}{2a^2}+\frac{1}{2a}.$$

2. Riješiti nejednačinu $\quad \dfrac{4}{x-1}\le 5-x.$

3. Odrediti za koje vrijednosti realnog parametra k nejednakost
$$x^2-2(4k-1)x+15k^2-2k-7>0$$
vrijedi za svako realno x.

4. Riješiti jednačinu $\quad 3^{\sqrt{2x^2-5x-3}}=\left(\dfrac{1}{9}\right)^{\frac{1-x}{2}}.$

5. Riješiti jednačinu $\quad \log_5 x+\log_{25} x=\log_{0,2}\sqrt{3}.$

6. Riješiti sistem jednačina
$$3^x2^y-24=0$$
$$\log_{2006}(y-x-1)=0.$$

7. Riješiti jednačinu $\quad 3\sin 2x-\cos 4x-1=0.$

8. Dužine stranica trougla su $a=p^2+p+1$, $b=p^2+2p$, $c=2p+1$. Izračunati srednji po veličini ugao tog trougla.

9. U jednakostranični trougao stranice $2cm$ upisana su 3 jednaka kruga, koji se dodiruju. Svaki od njih dodiruje dvije stranice datog trougla. Odrediti površinu krivolinijskog trougla određenog ovim krugovima.

10. Napisati jednačinu kružnice najmanjeg poluprečnika koju kružnica $x^2+y^2-2x-12y+29=0$ dodiruje iznutra, i koja dodiruje pravu $x-y-3=0$.

KVALIFIKACIONI ISPIT IZ MATEMATIKE 31.08.2006.

1. Uprostiti izraz
$$\left(\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}+\frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}}\right):\left(1+\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\right), x>1.$$

2. Riješiti nejednačinu $\left|\frac{3x-2}{x-1}\right| \leq 2$.

3. Za koje vrijednosti realnog parametra k oba korijena kvadratne jednačine
$$(k-2)x^2-2kx+k-3=0$$
su pozitivna?

4. Riješiti nejednačinu $25^x-124\cdot 5^x \geq 125$.

5. Riješiti jednačinu $\log_3 x+\log_9 x=\log_{\frac{1}{3}}\sqrt{3}$.

6. Riješiti sistem jednačina
$$\sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}=\frac{5}{2} \quad \wedge \quad x+y=5.$$

7. Dokazati identitet $\cos^2\alpha+2\sin^2\alpha+\sin^2\alpha\cdot tg^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}$.

8. U krugu su date tetive $AB=4cm$ i $AC=7cm$. One grade ugao od 60°. Izračunati poluprečnik kružnice.

9. U jednakokraki pravougli trougao upisan je kvadrat tako da mu dva tjemena pripadaju hipotenuzi, a po jedno katetama. Odrediti dužinu stranice kvadrata ako je dužina katete $8cm$.

10. Napisati jednačinu kružnice koja je koncentrična sa kružnicom $x^2+y^2+6x+2y+5=0$ i sadrži tačku $M(1,-4)$.

KVALIFIKACIONI ISPIT IZ MATEMATIKE
21.09.2006.

1. Uprostiti izraz
$$\left(-\frac{1}{a-b}-\frac{1}{a^3+b^3}:\frac{1}{a^2-ab+b^2}\right)\cdot\frac{a^2-b^2}{2a^2}+\frac{1}{2a}.$$

2. Riješiti nejednačinu $\quad |3x+5|\le 2|1-x|$.

3. Za koje vrijednosti realnog parametra k oba korijena kvadratne jednačine
$$(k-2)x^2-2kx+k-3=0$$
su negativna?

4. Riješiti jednačinu $\quad 3^{x^2-4x}=\left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{-2x-7}{2}}$.

5. Riješiti jednačinu $\quad \log_2\left(9-2^x\right)=3-x$.

6. Riješiti sistem jednačina
$$\sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}=\frac{10}{3}\ \wedge\ x+y=10.$$

7. Riješiti jednačinu $\quad 3\sin 2x-\cos 4x-1=0$.

8. Dužine stranica trougla su $a=p^2+p+1$, $b=p^2+2p$, $c=2p+1$. Izračunati srednji po veličini ugao tog trougla.

9. U jednakostranični trougao stranice $5cm$ pisana su 3 jednaka kruga, koji se dodiruju. Svaki od njih dodiruje dvije stranice datog trougla. Odrediti površinu krivolinijskog trougla određenog ovim krugovima.

10. Napisati jednačinu kružnice koja je koncentrična sa kružnicom $x^2+y^2+8x-2y-8=0$ i sadrži tačku $M(1,-4)$.

KVALIFIKACIONI ISPIT IZ MATEMATIKE
10.07.2007.

1. Uprostiti izraz
$$\frac{a^3-b^3}{a+b-\dfrac{ab}{a+b}}-\frac{a^3+b^3}{a-b+\dfrac{ab}{a-b}}.$$

2. Riješiti nejednačinu $|2x-1|\ge 3x-2$.

3. Odrediti za koje vrijednosti realnog parametra m su rješenja jednačine
$$(m-1)x^2+mx+2=0$$
negativna.

4. Riješiti sistem jednačina
$$3^x+5^y=14$$
$$9^x+25^y=106.$$

5. Riješiti jednačinu $\log_5 x+2\log_{25}(x-1)-\log_5 2=0$.

6. Riješiti sistem jednačina
$$\log_2\left(x^2+y^2\right)=5$$
$$\log_2 x+2\log_4 y=4.$$

7. Dokazati identitet $\cos 4\alpha+4\cos 2\alpha+3=8\cos^4\alpha$.

8. Riješiti jednačinu $1-\sin x+\cos x-\sin 2x+\cos 2x=0$.

9. U trouglu ABC je $b=\sqrt{6}$, $c=3+\sqrt{3}$ i $\alpha=\frac{\pi}{4}$. Izračunati stranicu a i ugao β.

10. Krajnje tačke duži su (-1,4), (1,0). Iz koje se tačke na simetrali ove duži data duž vidi pod pravim uglom?

KVALIFIKACIONI ISPIT IZ MATEMATIKE
30.08.2007.

1. Uprostiti izraz
$$\left(\frac{1}{4a+2}-\frac{1-a}{8a^3+1}:\frac{1-2a}{4a^2-2a+1}\right)\cdot\frac{4a+2}{2a-1}-\frac{1}{4a^2-4a+1}.$$

2. Riješiti nejednačinu $|x-1|+|3+x|\geq 3x-2$.

3. Odrediti za koje vrijednosti realnog parametra m su rješenja jednačine
$$(2m-1)x^2+2mx+2=0$$
realna.

4. Riješiti jednačinu $\left(11^x-11\right)^2=11^x+99$.

5. Riješiti sistem jednačina
$$3^x\cdot 2^y=576$$
$$\log_2(y-x)=2.$$

6. Riješiti jednačinu $\log_3 x\cdot\log_9 x\cdot\log_{27} x\cdot\log_{81} x=\dfrac{2}{3}$.

7. Dokazati identitet $ctg^2\alpha-\cos^2\alpha=\cos^2\alpha\cdot ctg^2\alpha$.

8. Riješiti nejednačinu $\sin^2 x\leq\dfrac{1}{2}$.

9. U krugu su date tetive $AB=4cm$ i $AC=7cm$. One grade ugao od 60°. Izračunati poluprečnik kružnice.

10. Napisati jednačinu kružnice koja je koncentrična sa kružnicom $x^2+y^2+10x-4y+5=0$ i sadrži tačku $M(2,-4)$.

KVALIFIKACIONI ISPIT IZ MATEMATIKE
07.07.2008.

1. Naći x ako je
$$\frac{a^2+a-6}{a^2+3a+9} : \frac{a-2}{10a^3-270} = x : \left(\frac{a+3}{a-3} + \frac{a-3}{a+3} - 2\right).$$

2. Neka su x_1 i x_2 rješenja jednačine
$$2kx^2 - (4k+1)x + 1 = 0.$$
Odrediti realan broj k tako da je $x_1^2 + x_2^2 = 3$.

3. Riješiti nejednačinu
$$\left|\frac{x^2-3x-4}{x^2+x+1}\right| < 2.$$

4. Riješiti jednačinu
$$\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}} = 0.$$

5. Riješiti jednačinu
$$\log x - \log\frac{1}{x-1} - \log 20 = 0.$$

6. Riješiti sistem jednačina
$$\log(x+y) + 2\log 2 = 1 + \log(x-y)$$
$$\log x - \log 3 = \log 7 - \log y.$$

7. Ako je $tg\frac{x}{2} = m$, izračunati
$$\frac{1-\sin^2\frac{x}{2}}{1+\sin x}.$$

8. Riješiti jednačinu
$$1 + \sin x + \cos x + \sin 2x + \cos 2x = 0.$$

9. U trouglu ABC je $b = \sqrt{6}$, $c = 3 + \sqrt{3}$ i $\alpha = \frac{\pi}{4}$. Izračunati stranicu a i ugao β.

10. Krajnje tačke duži su $(-4,1), (0,-1)$. Iz koje se tačke na simetrali ove duži data duž vidi pod pravim uglom?

Rješenja:

1. Наћи x ако је

$$\frac{a^2+a-6}{a^2+3a+9}:\frac{a-2}{10a^3-270}=x:\left(\frac{a+3}{a-3}+\frac{a-3}{a+3}-2\right)$$

Рјешење

Ријешимо прво квадратну једначину $a^2+a-6=0$. Добијамо да су њена рјешења $a_1=2$ и $a_2=-3$ па се одговарајући полином a^2+a-6 може записати као $a^2+a-6=(a-2)(a+3)$

Уочавајући разлику кубова даље имамо

$10a^3-270=10\left(a^3-27\right)=10\left(a^3-3^3\right)=10\left(a-3\right)\left(a^2+3a+9\right)$

Сада је

$$L=\frac{\dfrac{(a-2)(a+3)}{a^2+3a+9}}{\dfrac{(a-2)}{10(a-3)\left(a^2+3a+9\right)}}=10\left(a-3\right)\left(a^2+3a+9\right)$$

Са десне стране имамо

$$\frac{(a+3)^2+(a-3)^2-2(a-3)(a+3)}{(a-3)(a+3)}=\frac{(a+3)^2-2(a-3)(a+3)+(a-3)^2}{(a-3)(a+3)}=$$

$$\frac{\left((a+3)-(a-3)\right)^2}{(a-3)(a+3)}=\frac{(a+3-a+3)^2}{(a-3)(a+3)}=\frac{6^2}{(a-3)(a+3)}=\frac{36}{(a-3)(a+3)}$$

Ако добијене резултате уврстимо у пропорцију, имамо

$$10(a-3)(a+3)=\frac{\dfrac{x}{1}}{\dfrac{36}{(a-3)(a+3)}}$$

Одавде је

$$10(a-3)(a+3)=\frac{x(a-3)(a+3)}{36}$$

и на крају добијамо

$x=360$

2. Нека су x_1 и x_2 рјешења једначине $2kx^2-(4k+1)x+1=0$. Одредити реалан број k тако да је $x_1^2+x_2^2=3$.

Рјешење

Прво, подсјетимо се формуле за квадрат збира $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Ако примијенимо ту формулу на рјешења x_1 и x_2 имамо

$(x_1 + x_2)^2 = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$

Одавде је $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$

Подсјетимо се сада Вијетових формула

$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$ и $x_1x_2 = \frac{c}{a}$

Ако уврстимо вриједности коефицијената из наше једначине имамо

$x_1 + x_2 = \frac{4k+1}{2k}$ и $x_1x_2 = \frac{1}{2k}$

Уврстимо добијено у услов задатка

$3 = \frac{16k^2 + 4k + 1}{4k^2}$

$$3 = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = \left(\frac{4k+1}{2k}\right)^2 - 2\frac{1}{2k} = \frac{16k^2 + 8k + 1}{4k^2} - \frac{1}{k} = \frac{16k^2 + 8k + 1 - 4k}{4k^2}$$

$12k^2 = 16k^2 + 4k + 1$

На овај начин долазимо до квадратне једначине

$4k^2 + 4k + 1 = 0$

Њено рјешење $k = \frac{-1}{2}$ је и коначно рјешење задатка.

Провјера рјешења

Ако уврстимо вриједност $k = \frac{-1}{2}$ једначина постаје $-x^2 + x + 1 = 0$. Њена рјешења су

$x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ и $x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. За њих очигледно важи $x_1^2 + x_2^2 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 3$

3. Ријешити неједначину $\left|\frac{x^2 - 3x - 4}{x^2 + x + 1}\right| < 2$

Рјешење

Како је $x^2 + x + 1 > 0$ за свако x то је неједначина еквивалентна са неједначином

$$\frac{\left|x^2-3x-4\right|}{x^2+x+1}<2$$

$$\Leftrightarrow \quad \left|x^2-3x-4\right|<2\left(x^2+x+1\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \left|x^2-3x-4\right|<2x^2+2x+2$$

$$\Leftrightarrow \quad -2x^2-2x-2<x^2-3x-4<2x^2+2x+2$$

Прво ћемо ријешити десну неједнакост

$x^2-3x-4<2x^2+2x+2$
$x^2+5x+6>0$
Рјешења одговарајуће једначине су $x_1=-3$ и $x_2=-2$ па су рјешења неједначине
$x\in\left(-\infty,-3\right)\cup\left(-2,+\infty\right)$

Остало је да ријешимо лијеву неједначину

$-2x^2-2x-2<x^2-3x-4$
$3x^2-x-2>0$
Рјешења одговарајуће једначине су $x_1=1$ и $x_1=-\dfrac{2}{3}$ па су рјешења неједначине
$x\in\left(-\infty,-\dfrac{2}{3}\right)\cup\left(1,+\infty\right)$

Коначно рјешење задатка биће пресјек рјешења лијеве и десне неједначине тј
$x\in\left(-\infty,-3\right)\cup\left(1,+\infty\right)$

4. Ријешити једначину $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=0$

Рјешење

Пошто је ово збир два ненегативна сабирка то да би збир био једнак нули морају обадва бити једнаки нули тј мора бити

$\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}=0$ и $\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=0$
Коријен је једнак нули само ако је подкорјена функција једнака нули па мора бити
$x+3-4\sqrt{x-1}=0$ и $x+8-6\sqrt{x-1}=0$

Ријешимо прву једначину
$\sqrt{x-1}=\dfrac{x+3}{4}$

$$x-1=\left(\frac{x+3}{4}\right)^2=\frac{x^2+6x+9}{16}$$

$16x+16=x^2+6x+9$

$x^2-10x+25=0$

Одавде добијамо рјешење прве једначине $x=5$

Ријешимо другу једначину

$$\sqrt{x-1}=\frac{x+8}{6}$$

$$x-1=\left(\frac{x+8}{6}\right)^2=\frac{x^2+16x+64}{36}$$

$36x-36=x^2+16x+64$

$x^2-20x+100=0$

Одавде добијамо рјешење друге једначине $x=10$

Како двије једначине немају заједничких рјешења то почетни задатак НЕМА рјешења.

5. Ријешити једначину $\log x-\log\frac{1}{x-1}-\log 20=0$

Рјешење

Користећи својство логаритамске функције да је $\log x+\log y=\log xy$ и

$\log x-\log y=\log\frac{x}{y}$ имамо

$$\log\frac{x}{\frac{1}{x-1}}-\log 20=0$$

$$\log\left[x\left(x-1\right)\right]-\log 20=0$$

$$\log\frac{x\left(x-1\right)}{20}=0$$

Нула логаритамске функције је за вриједност $x=1$ па имамо

$$\frac{x\left(x-1\right)}{20}=1$$

одакле добијамо квадратну једначину

$x^2-x-20=0$

Њена рјешења $x_1=5$ и $x_1=-4$ су и коначна рјешења задатка

Провјера рјешења

$$\log 5-\log\frac{1}{4}-\log 20=\log\frac{5}{\frac{1}{4}}-\log 20=\log 20-\log 20=0$$

$$\log(-4)-\log\frac{1}{-5}-\log 20=\log\frac{-4}{\frac{1}{-5}}-\log 20=\log 20-\log 20=0$$

6. Ријешити систем једначина $\begin{cases}\log(x+y)+2\log 2=1+\log(x-y)\\ \log x-\log 3=\log 7-\log y\end{cases}$

Рјешење

$$\begin{cases}\log(x+y)+\log 2^2-\log(x-y)=1\\ \log x+\log\frac{1}{3}-\log 7+\log y=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}\log\dfrac{4(x+y)}{x-y}=1\\ \log\dfrac{x\frac{1}{3}y}{7}=0\end{cases}\qquad\begin{cases}\dfrac{4(x+y)}{x-y}=10\\ \dfrac{x\frac{1}{3}y}{7}=1\end{cases}$$

$$\begin{cases}4x+4y=10x-10y\\ xy=21\end{cases}\quad\begin{cases}6x-14y=0\\ xy=21\end{cases}\quad\begin{cases}3x-7y=0\\ xy=21\end{cases}$$

Из прве једначине добијамо $x=\frac{7}{3}y$ што уврстимо у другу па имамо

$$\frac{7}{3}y^2=21$$
$$y^2=9$$
$$y=3$$

Напомена Овдје нисмо узели у обзир рјешење $y=-3$ јер логаритамска функција није дефинисана за негативне бројеве.

Ако се вратимо у једначину $x=\frac{7}{3}y$ добијамо рјешење $x=7$

Дакле, коначно рјешење задатка је уређени пар бројева $(x,y)=(7,3)$

Провјера рјешења

$$\log 10+2\log 2=1+\log 4$$
$$\log 7-\log 3=\log 7-\log 3$$

7. Ако је $tg\frac{x}{2}=m$ израчунати $\dfrac{1-\sin^2\frac{x}{2}}{1+\sin x}$

Рјешење

$$\frac{1-\sin^2\frac{x}{2}}{1+\sin x}=\frac{1-\sin^2\frac{x}{2}}{1+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=\frac{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}-2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}\qquad\frac{:\cos^2\frac{x}{2}}{:\cos^2\frac{x}{2}}$$

$$=\frac{1}{\dfrac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}+\dfrac{\cos^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}+\dfrac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}}=\frac{1}{tg^2\frac{x}{2}+1+2tg\frac{x}{2}}=\frac{1}{m^2+1+2m}$$

8. Ријешити једначину $1+\sin x+\cos x+\sin 2x+\cos 2x=0$

Рјешење

Искористићемо следеће тригонометријске неједнакости

$\sin^2 x+\cos^2 x=1$

$\sin 2x=2\sin x\cos x$

$\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x$

$$\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)+\sin x+\cos x+2\sin x\cos x+\cos^2 x-\sin^2 x=0$$

$$2\cos^2 x+\sin x+\cos x+2\sin x\cos x=0$$

$$2\cos x\left(\cos x+\sin x\right)+\sin x+\cos x=0$$

$$\left(\cos x+\sin x\right)\left(2\cos x+1\right)=0$$

$\cos x+\sin x=0$ или $2\cos x+1=0$

$\cos x+\sin x=0$ или $\cos x=\frac{-1}{2}$

Из прве једначине добијамо $x_1=\frac{-\pi}{4}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$ а из друге $x_2=\frac{2\pi}{3}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}$ и $x_3=-\frac{2\pi}{3}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}$.

9. У троуглу ABC је $b=\sqrt{6}$, $c=3+\sqrt{3}$ и $\alpha=\frac{\pi}{4}$. Израчунати страницу a и угао β.

Рјешење

Познате су двије странице и угао захваћен њима, па је по косинусној теореми

$$a=\sqrt{b^2+c^2-2bc\cos\alpha}$$

$$a=\sqrt{\sqrt{6}^2+\left(3+\sqrt{3}\right)^2-2\sqrt{6}\left(3+\sqrt{3}\right)\cos\frac{\pi}{4}}$$

$$a=\sqrt{6+\left(9+6\sqrt{3}+3\right)-2\sqrt{6}\left(3+\sqrt{3}\right)\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$a=2\sqrt{3}$$

Угао β добијамо поновном примјеном косинусне теореме

$$\cos\beta=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}=\frac{12+6\sqrt{3}+12-6}{2\left(3+\sqrt{3}\right)2\sqrt{3}}=\frac{18+6\sqrt{3}}{4\sqrt{3}\left(3+\sqrt{3}\right)}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Одавде је $\beta=\frac{\pi}{6}$.

10.Крајње тачке дужи су $(-4,1)$ и $(0,-1)$. Из које се тачке на симетрали ове дужи дата дуж види под правим углом?

Рјешење

Напомена: Обавезно нацртајте слику!

Прво одредимо центар дужи чије су крајње тачке $(-4,1)$ и $(0,-1)$. То ће бити тачка $\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)=(-2,0)$.

Једначина праве p кроз кроз тачке $(-4,1)$ и $(0,-1)$ је

$$y-1=\frac{-1-1}{0+4}(x+4)$$

$$y-1=\frac{-1}{2}(x+4)=\frac{-1}{2}x-2$$

Одавде видимо да је њен коефицијент правца $k_p=\frac{-1}{2}$

Како је симетрала s нормална на праву p то ће коефицијент правца симетрале бити $k_s=\frac{-1}{k_p}=2$. Дакле једначина симетрале је $y=kx+n=2x+n$. Непознати одсјечак n рачунамо из чињенице да симетрала пролази кроз центар дужи тј кроз тачку $(-2,0)$ па је одатле $0=2(-2)+n$ тј $n=4$

Дакле, једначина симетрале је $y=2x+4$.

Подсјетимо се теореме која каже да је периферијски угао над пречником прав. Конструишимо затим кружницу са центром у $(-2,0)$ полупречника $\sqrt{5}$. Та кружница очигледно садржи тачке $(-4,1)$ и $(0,-1)$ и са сваке тачке кружнице наша дуж се види под правим углом.

Дакле, рјешење нашег задатка задатка биће тачке у којима се сијеку кружница и симетрала тј преостаје нам да ријешимо систем једначина

$$\begin{cases} y = 2x + 4 \\ (x+2)^2 + y^2 = 5 \end{cases}$$

Рјешење овог система су тачке $(-3,-2)$ и $(-1,2)$

KVALIFIKACIONI ISPIT IZ MATEMATIKE
27.08.2008.

1. Uprostiti izraz
$$\frac{a^2-3a-(a-1)\sqrt{a^2-4}+2}{a^2+3a-(a+1)\sqrt{a^2-4}+2}\cdot\sqrt{\frac{a+2}{a-2}}.$$

2. Odrediti realan parametar a u jednačini
$$x^2-3ax+a^2=0,$$
ako za njene korijene x_1 i x_2 vrijedi $x_1^3+x_2^3=18$.

3. Riješiti nejednačinu
$$\frac{3(x-1)^2+6(x-1)-9}{2x-1}\leq x.$$

4. Riješiti jednačinu
$$\sqrt{x+4}-\sqrt{2x-5}=\sqrt{4x-5}.$$

5. Ako je
$$\log_{15}\frac{2}{9}=\log_3 x=\log_5(1-x),$$
odrediti x.

6. Riješiti sistem
$$2\log(x+y)=\log 9$$
$$3^{x^2}\cdot 9^y=3^9.$$

7. Dokazati identitet
$$\cos 4\alpha+4\cos 2\alpha+3=8\cos^4\alpha.$$

8. Riješiti jednačinu
$$2\sin^2 x+\cos x-1=0.$$

9. Riješiti nejednačinu
$$\sin x+\sqrt{3}\cos x<\sqrt{2}.$$

10. Naći jednačinu tangente kruga
$$x^2+y^2+4x+2y+1=0$$
koja je normalna na pravu $5x-3y-5=0$.

KVALIFIKACIONI ISPIT IZ MATEMATIKE
11.09.2008.

1. Izračunati vrijednost izraza
$$\left(\frac{a^{\frac{3}{2}}-b^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}+(a\cdot b)^{\frac{1}{2}}\right):\left(\frac{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}{a-b}\right)^{-2}$$
za $a=1000$ i $b=64$.

2. Odrediti realan parametar a u jednačini
$$x^2-3ax+1-2a^2=0,$$
ako za njene korijene x_1 i x_2 vrijedi $x_1^2+x_2^2=50$.

3. Riješiti nejednačinu
$$(x^2-4x)^2\geq 16.$$

4. Riješiti jednačinu
$$\sqrt{x+3}-\sqrt{2x-7}=\sqrt{4x-9}.$$

5. Riješiti nejednačinu
$$\log_6(x-3\sqrt{x+1}+3)>1.$$

6. Riješiti sistem
$$\log x+\log y=1$$
$$x^2+y^2=101.$$

7. Nacrtati grafik funkcije
$$y=-2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right).$$

8. Koliko rješenja ima jednačina
$$\sin x+\cos 2x-1=0$$
na segmentu $[10\pi,14\pi]$.

9. Riješiti nejednačinu
$$\sin x+\sqrt{3}\cos x<2.$$

10. Naći jednačinu tangente kruga
$$x^2+y^2+4x+2y+1=0$$
koja je normalna na pravu $3x-5y-5=0$.

KVALIFIKACIONI ISPIT IZ MATEMATIKE
26.09.2008.

1. Izračunati vrijednost izraza

$$\left(\frac{a^{\frac{3}{2}}-b^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}+(a\cdot b)^{\frac{1}{2}}\right):\left(\frac{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}{a-b}\right)^{-2}$$

   za $a=27$ i $b=125$.

2. Odrediti realan parametar a u jednačini

$$x^2-6ax+1-8a^2=0,$$

   ako za njene korijene x_1 i x_2 vrijedi $x_1^2+x_2^2=50$.

3. Riješiti nejednačinu

$$(x^2-2x)^2\geq 1.$$

4. Riješiti jednačinu

$$\sqrt{x+2}-\sqrt{2x-9}=\sqrt{4x-13}.$$

5. Riješiti nejednačinu

$$\log_6(x^2+5x)>1.$$

6. Riješiti sistem

$$\log x+\log y=1$$
$$x^2+y^2=101.$$

7. Nacrtati grafik funkcije

$$y=-3\sin\left(3x-\frac{\pi}{3}\right).$$

8. Koliko rješenja ima jednačina

$$\sin x+\cos 2x-1=0$$

   na segmentu $[2\pi,6\pi]$.

9. Riješiti nejednačinu

$$\sin x+\sqrt{3}\cos x\geq 2.$$

10. Naći jednačinu tangente kruga

$$x^2+y^2+4x+2y+1=0$$

   koja je normalna na pravu $5x-3y-1=0$.