1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\sum$

UNIVERZITET U NIŠU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
ODSEK ZA MATEMATIKU I INFORMATIKU

29.06.2010.

PRIJEMNI ISPIT IZ MATEMATIKE

1. Odrediti vrednost parametra m tako da je nejednakost

$$x^2 - 2(4m-1)x + 15m^2 - 2m - 7 > 0$$

zadovoljena za svaki realan broj x.

2. Rešiti jednačinu: $\sqrt{1-4x^2} = 1-3x.$

3. Dat je pravougli trougao čija je hipotenuza 12cm i jedan oštar ugao $30°$. Izračunati površinu trougla.

4. Rešiti jednačinu: $8 \cdot \dfrac{3^{x-2}}{3^x - 2^x} = 1 + \left(\dfrac{2}{3}\right)^x.$

5. Rešiti nejednačinu: $\log_{\frac{1}{2}} \dfrac{1-2x}{1+x} \le 2.$

6. Date su tačke $A(3,1)$ i $B(7,7)$. Odrediti jednačinu simetrale duži AB.

7. Rešiti jednačinu: $\sin x - \cos x = \sqrt{2}.$

8. Kada se omotač kupe razvije u ravni dobija se četvrtina kruga poluprečnika $4\sqrt{5}$. Izračunati zapreminu te kupe.

9. Predstaviti u trigonometrijskom obliku kompleksan broj $\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^{11}.$

10. Odrediti vrednost realnih brojeva x i y, tako da brojevi $2x-y,\ x+2y-5,\ x+y,\ 4x-3y+8$ čine aritmetički niz.

Napomena: Prijemni ispit traje 120min. Pri izradi zadataka rešenja ispisati detaljno.

29.06.2010.

REŠENJA ZADATAKA PRIJEMNOG ISPITA

1. Nejednakost je zadovoljena za sve vrednosti realnog broja x, ako i samo ako jednačina

$$x^2 - 2(4m-1)x + 15m^2 - 2m - 7 = 0$$

nema realnih korena, tj. ako i samo ako je diskriminanta

$$D = (4m-1)^2 - (15m^2 - 2m - 7) < 0.$$

Dakle, rešavamo jednačinu

$$D = 16m^2 - 8m + 1 - 15m^2 + 2m + 7 = m^2 - 6m + 8 = 0$$
$$m_{1,2} = 3 \pm \sqrt{9-8}$$
$$m_1 = 4, \quad m_2 = 2.$$

Jasno je da je $D < 0 \iff m \in (2,4)$, tj. nejednakost je zadovoljena ako i samo ako $m \in (2,4)$.

2. Da bi jednačina imala smisla izraz pod korenom mora biti veci ili jednak nuli.Dakle, $1 - 4x^2 \geq 0 \ \ldots \ (*)$ Kako je $\sqrt{1-4x^2} \geq 0$ to je $1 - 3x \geq 0 \ \ldots \ (**)$. Rešenja jednačine $1 - 4x^2 = 0$ su $x_1 = -\frac{1}{2}$ i $x_2 = \frac{1}{2}$, dok jednačina $1 - 3x = 0$ ima rešenje $x = \frac{1}{3}$. Dakle, iz $(*)$ zaključujemo da $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, a iz $(**)$ je $x \leq \frac{1}{3}$, što znaci da ima smisla rešavati jednačinu za

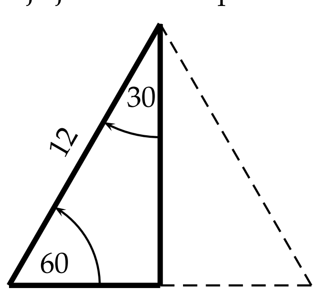
$$\mathbf{x} \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}].$$

Kvadriranjem jednačina postaje

$$1 - 4x^2 = (1-3x)^2 \iff 1 - 4x^2 = 1 - 6x + 9x^2 \iff 13x^2 - 6x = 0$$
$$\iff x \cdot (13x - 6) = 0 \iff x = 0 \ \vee \ x = \frac{6}{13}.$$

Kako $\frac{6}{13} \notin [-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}]$, jedino rešenje jednačine je $x = 0$.

3. Pravougli trougao sa oštrim uglom 30° možemo dopuniti do jednakostraničnog trougla, čija je stranica hipotenuza pravouglog trougla na sledeći način:



Površina dobijenog jednakostraničnog trougla stranice $a = 12$cm je

$$P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{12^2\sqrt{3}}{4} = \frac{144\sqrt{3}}{4} = 36\sqrt{3}cm^2.$$

Površina datog pravouglog trougla jednaka je polovini površine jednakostraničnog trougla, tj. $18\sqrt{3}$.

4.

$$8 \cdot \frac{3^{x-2}}{3^x - 2^x} = 1 + \left(\frac{2}{3}\right)^x \quad \Leftrightarrow \quad 8 \cdot \frac{\frac{3^x}{3^2}}{3^x - 2^x} = \frac{8}{9} \cdot \frac{3^x}{3^x - 2^x} = 1 + \left(\frac{2}{3}\right)^x$$

Deljenjem i brojioca i imenioca u razlomku sa leve strane izrazom 3^x (jer je $3^x \neq 0$) dobijamo:

$$\frac{8}{9} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^x} = 1 + \left(\frac{2}{3}\right)^x.$$

Jednačina ima smisla za $1 - \left(\frac{2}{3}\right)^x \neq 0$, odnosno $\left(\frac{2}{3}\right)^x \neq 1$, tj. $x \neq 0$. Smenom $\left(\frac{2}{3}\right)^x = t$, za $t \neq 1$, uz uslov $t > 0$, jednačina postaje:

$$\frac{8}{9} \cdot \frac{1}{1 - t} = 1 + t,$$

Množenjem sa $1 - t$ dobijamo

$$\frac{8}{9} = (1 + t)(1 - t) = 1 - t^2. \text{ Dakle, } t^2 = 1 - \frac{8}{9} = \frac{1}{9}$$

i kako je $t > 0$ dobijamo da je $t = \frac{1}{3}$. Vraćanjem smene

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{1}{3}, \text{ odnosno } x = \log_{\frac{2}{3}} \frac{1}{3}.$$

5. Da bi logaritam u nejednačini bio definisan, neophodno je da bude $\frac{1 - 2x}{1 + x} > 0$ i $1 + x \neq 0$. Data nejednačina se može napisati u obliku

$$\log_{\frac{1}{2}} \frac{1 - 2x}{1 + x} \leq \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\log_{\frac{1}{2}} \frac{1 - 2x}{1 + x} \leq \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1 - 2x}{1 + x} \geq \frac{1}{4}.$$

Kako iz $\frac{1 - 2x}{1 + x} \geq \frac{1}{4}$ neposredno sledi da je $\frac{1 - 2x}{1 + x} > 0$, to rešavamo samo nejednačinu $\frac{1 - 2x}{1 + x} \geq \frac{1}{4}$ pod uslovom $x \neq / - 1$.

$$\begin{aligned}
& \frac{1 - 2x}{1 + x} - \frac{1}{4} \geq 0 \\
\Leftrightarrow\ & \frac{4(1 - 2x) - 1 - x}{4(1 + x)} \geq 0 \\
\Leftrightarrow\ & \frac{4 - 8x - 1 - x}{4(1 + x)} \geq 0 \\
\Leftrightarrow\ & \frac{3 - 9x}{4(1 + x)} \geq 0 \\
\Leftrightarrow\ & \big((3 - 9x \geq 0 \wedge 1 + x \geq 0) \vee (3 - 9x \leq 0 \wedge 1 + x \leq 0)\big) \\
\Leftrightarrow\ & \big((x \leq \frac{1}{3} \wedge x > -1) \vee (x \geq \frac{1}{3} \wedge x < -1)\big) \\
\Leftrightarrow\ & x \in (-1, \frac{1}{3}].
\end{aligned}$$

6. Označimo sa $C(x_C, y_C)$ središte duži AB. Tada je

$$x_C = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{3+7}{2} = 5 \quad \text{i} \quad y_C = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{1+7}{2} = 4,$$

te simetrala duži AB sadrži tačku $C(5,4)$. Jednačina prave p kroz tačke A i B je

$$p: \; y - y_A = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \cdot (x - x_A) \;\; \text{tj.} \;\; p: y - 1 = \frac{7-1}{7-3}(x-3)$$
$$p: y = \frac{6}{4}(x-3) + 1 = \frac{3}{2}(x-3) + 1.$$

Dakle, koeficijent pravca prave p je $k = \frac{3}{2}$. Kako je simetrala duži AB normalna na p, njen koeficijent pravca je $k_1 = -\frac{1}{k} = -\frac{2}{3}$. Jednačina simetrale s kroz tačku C je $y - y_C = k_1(x - x_C)$, pa je

$$s: \; y - 4 = -\frac{2}{3}(x-5) \quad \Leftrightarrow \quad s: \; y = -\frac{2}{3}x + \frac{22}{3}.$$

7. Deljenjem i leve i desne strane date jednačine brojem $\sqrt{2}$ dobijamo:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sin x - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x = 1.$$

Pošto je $\sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ imamo:

$$\begin{aligned}
&\sin x \cos\frac{\pi}{4} - \cos x \sin\frac{\pi}{4} = 1 \\
\Leftrightarrow \quad &\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1, \\
\Leftrightarrow \quad &x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z} \\
\Leftrightarrow \quad &x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} + 2k\pi = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

8. Dužina poluprečnika kruga, čiju četvrtinu dobijamo razvojem omotača kupe je, u stvari, izvodnica kupe $s = 4\sqrt{5}$. Obim osnove kupe jeste četvrtina obima kruga poluprečnika $4\sqrt{5}$, tj. $O = \frac{1}{4} \cdot 8\sqrt{5}\pi = 2\sqrt{5}\pi$, odakle je jasno da je poluprečnik osnove kupe $r = \sqrt{5}$. Visinu kupe dobijamo pomoću Pitagorine teoreme:

$$H = \sqrt{s^2 - r^2} = \sqrt{(4\sqrt{5})^2 - (\sqrt{5})^2} = \sqrt{16 \cdot 5 - 5} = \sqrt{15 \cdot 5} = \sqrt{3 \cdot 25} = 5\sqrt{3}.$$

Zapremina kupe je

$$V = \frac{1}{3} \cdot r^2\pi \cdot H = \frac{1}{3} \cdot 5 \cdot 5\sqrt{3}\pi = \frac{1}{3} \cdot 25\sqrt{3}\pi.$$

9. Racionalisaćemo kompleksan broj $z = \frac{1-i}{1+i}$.

$$\frac{1-i}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i} = \frac{(1-i)^2}{1^2 - i^2} = \frac{1 - 2i + i^2}{1+1} \frac{1-2i-1}{2} = \frac{-2i}{2} = -i.$$

Dakle, $z^{11} = \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{11} = (-i)^{11} = (-i)^{4 \cdot 2 + 3} = (-i)^{4^2} \cdot (-i)^3 = (-i)^3 = i$, pa je $z^{11} = \cos\frac{\pi}{2} + i \sin\frac{\pi}{2}$.

10. Kako je svaki član aritmetičkog niza aritmetička sredina svog prethodnika i sledbenika, dobijamo sistem dve jednačine sa dve nepoznate:

$$
\begin{aligned}
&x + 2y - 5 = \frac{2x - y + x + y}{2} && x + y = \frac{4x - 3y + 8 + x + 2y - 5}{2} \\
&2x + 4y - 10 = 3x && 2x + 2y = 5x - y + 3 \\
&-x + 4y = 10 && -3x + 3y = 3 \\
&-x + 4y = 10 && -x + y = 1 \\
&3y = 9 && x = y - 1 \\
&y = 3 && x = 2
\end{aligned}
$$

Aritmetički niz čine brojevi: $1,\ 3,\ 5,\ 7.$