Tejlorov i Maklorenov red

Neka je funkcija f definisana i neprekidna zajedno sa svojih n izvoda na intervalu $\left[a,x\right]$ (odnosno $\left[x,a\right]$ ako je x < *a*) i neka na intervalu *(a, x)* (odnosno *(x, a)*) ima n+1 izvod. Tada važi **Tejlorova formula**

$$f(x)=T_{n,a}(x)+R_{n,a}(x)$$

gde je $T_{n,a}(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)^1+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3+...+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$

a $R_{n,a}(x)$ je ostatak ili greška aproksimacije. Videćemo kasnije razne oblike ostatka i koji oblik je najlakši za korišćenje.

Neki profesori ne pišu $T_{n,a}(x)$ već samo $T_n(x)$ a kažu oko koje tačke se razvija funkcija (to je vrednost za *a*). Vi naravno radite kako kaže Vaš profesor....

Ako je tačka a = 0 dobijamo **Maklorenovu formulu**

$$f(x)=T_{n,0}(x)+R_{n,0}(x)$$

$$T_{n,0}(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x^1+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+...+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

<u>Tejlorov i Maklorenov red</u>

Neka funkcija f ima u tački x = a konačan n-ti izvod $f^{(n)}(x)$ za $\forall n\in N$.

Beskonačni red $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$ je Tejlorov red.

Za *a* = 0 imamo Maklorenov red $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$.

Oblici ostatka $R_{n,a}(x)$

1. Peanov oblik ostatka

Preporučujemo da koristite njega osim ako ne traže drugačije!

$R_{n,a}(x)=o((x-a)^n)$

Ovo *o* označava beskonačno malu veličinu , a ceo izraz bi pročitali : $R_{n,a}(x)$ je beskonačno mala veličina u odnosu na $(x-a)^n$ kad x teži *a*.

On nam ustvari kaže da je $\lim_{x\to a}\frac{R_{n,a}(x)}{(x-a)^n}=0$

2. Lagranžov oblik ostatka

$R_{n,a}(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$ gde je c broj između a i x (odnosno između x i a).

3. Košijev oblik ostatka

$R_{n,a}(x) = \dfrac{(x-a)^{n+1}(1-\theta)^n}{n!} f^{(n+1)}(a+\theta(x-a))$ gde je $0<\theta<1$

4. Šlemilh – Rošov oblik ostatka

$R_{n,a}(x) = \left(\dfrac{x-a}{x-c}\right)^p \dfrac{(x-c)^{n+1}}{p \cdot n!} f^{(n+1)}(c)$ gde je p= n + 1 i $p \in N$.

5. Integralni oblik ostatka

$R_{n,a}(x) = \int\limits_a^x \dfrac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n dt$

Primer 1.

Odrediti Tejlorov polinom trećeg stepena kojim se funkcija $f(x) = x^3 \ln x$ aproksimira u tački x = 1.

Rešenje:

Naš posao je da nađemo treći izvod date funkcije , da u f(x), f'(x), f''(x) i f'''(x) zamenimo umesto x-sa 1, a pošto nije naglašeno koji oblik ostatka treba , mi ćemo koristiti Peanov oblik.

$f(x) = T_{3,1}(x) + R_{3,1}(x)$

$T_{3,1}(x) = f(1) + \dfrac{f'(1)}{1!}(x-1)^1 + \dfrac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \dfrac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3$

$R_{3,1}(x) = o((x-1)^3)$

Tražimo izvode:

$$f(x) = x^3 \ln x \to f(1) = 1^3 \cdot \ln 1 = 1 \cdot 0 = 0$$

$$f\,'(x) = 3x^2 \ln x + \frac{1}{x} \cdot x^3 = 3x^2 \ln x + x^2$$

$$f\,'(x) = x^2(3\ln x + 1) \to f\,'(1) = 1^2(3\ln 1 + 1) = 1$$

$$f\,''(x) = 2x(3\ln x + 1) + \frac{3}{x} \cdot x^2 = 2x(3\ln x + 1) + 3x$$

$$f\,''(x) = x(6\ln x + 5) \to f\,''(1) = 1(6 \cdot \ln 1 + 5) = 5$$

$$f\,'''(x) = 6\ln x + 5 + \frac{6}{x} \cdot x$$

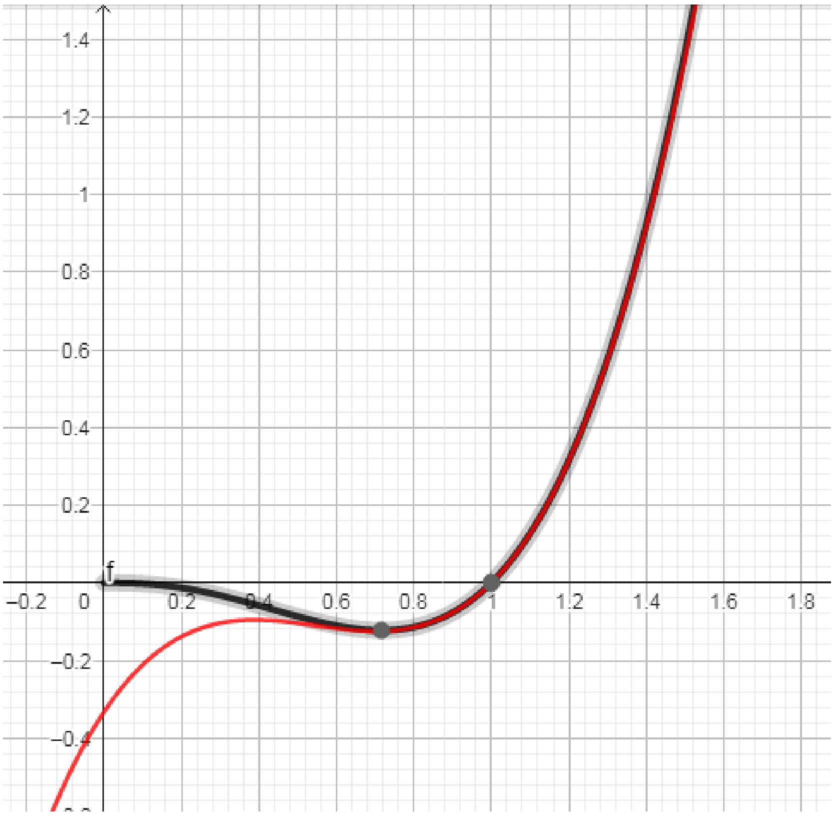
$$f\,'''(x) = 6\ln x + 11 \to f\,'''(x) = 6\ln 1 + 11 = 11$$

Sad ovo menjamo u formulu:

$$f(x) = 0 + \frac{1}{1}(x-1)^1 + \frac{5}{2}(x-1)^2 + \frac{11}{6}(x-1)^3 + o((x-1)^3)$$

$$f(x) = (x-1) + \frac{5}{2}(x-1)^2 + \frac{11}{6}(x-1)^3 + o((x-1)^3)$$

Nacrtaćemo na istom koordinatnom sistemu grafike funkcija grafike funkcija $f(x) = x^3 \ln x$ (crna boja) I $f(x) = (x-1) + \frac{5}{2}(x-1)^2 + \frac{11}{6}(x-1)^3$ (crvena boja) da uočimo šta se dešava oko tačke x = 1.



Vidimo da se u okolini tačke x = 1 ovi grafici skoro pa preklapaju!

Primer 2.

Aproksimirati funkciju $f(x) = xe^{-x}$ Tejlorovim polinomom četvrtog stepena u tački x = 2.

Rešenje:

$$f(x) = xe^{-x} \to f(2) = 2e^{-2} = \frac{2}{e^2}$$

$$f'(x) = 1 \cdot e^{-x} + (-e^{-x})x$$

$$f'(x) = e^{-x}(1-x) \to f'(2) = e^{-2}(1-2) = -\frac{1}{e^2}$$

$$f''(x) = -e^{-x}(1-x) + (-1)e^{-x}$$

$$f''(x) = e^{-x}(x-2) \to f''(x) = e^{-2}(2-2) = 0$$

$$f'''(x) = -e^{-x}(x-2) + 1e^{-x}$$

$$f'''(x) = e^{-x}(3-x) \to f'''(2) = e^{-2}(3-2) = \frac{1}{e^2}$$

$$f^{iv}(x) = -e^{-x}(3-x) + (-1)e^{-x}$$

$$f^{iv}(x) = e^{-x}(x-4) \to f^{iv}(2) = e^{-2}(2-4) = -\frac{2}{e^2}$$

$$f(x) = T_{4,2}(x) + R_{4,2}(x)$$

$$T_{4,2}(x) = f(2) + \frac{f'(2)}{1!}(x-2)^1 + \frac{f''(2)}{2!}(x-2)^2 + \frac{f'''(2)}{3!}(x-2)^3 + \frac{f^{iv}(2)}{4!}(x-2)^4$$

$$R_{4,2}(x) = o((x-2)^4)$$

$$f(x) = \frac{2}{e^2} - \frac{1}{e^2}(x-2)^1 + 0 \cdot (x-2)^2 + \frac{1}{6e^2}(x-2)^3 - \frac{1}{12e^2}(x-2)^4 + o((x-2)^4)$$

Ajmo opet da pogledamo grafike:

Opet primećujemo poklapanje , sada je ono na većem intervalu jer smo radili razvoj do 4-tog stepena. Dakle, što je duži razvoj to će aproksimacija (ovo poklapanje) biti tačnija.

Primer 3.

Razviti funkciju f(x) = sin x u Maklorenov red.

Rešenje:

Ovde ćemo naći uopštenu formulu. Radimo razvijanje oko tačke x = 0, i koristimo

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

$$f(x)=\sin x\rightarrow f(0)=\sin 0=0$$

Dalje tražimo izvode i njihove vrednosti u x = 0:

$$f'(x)=\cos x\rightarrow f'(0)=\cos 0=1$$
$$f''(x)=-\sin x\rightarrow f''(0)=-\sin 0=0$$
$$f'''(x)=-\cos x\rightarrow f'''(0)=-\cos 0=-1$$
$$f^{iv}(x)=\sin x\rightarrow f^{iv}(0)=\sin 0=0$$

Nadalje će se ove 4 vrednosti ponavljati, peti izvod je 1, šesti je 0, sedmi je -1, osmi 0 itd.

Zamenimo vrednosti u formulu:

$$\sin x=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x^1+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\ldots$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\frac{x^9}{9!}-\frac{x^{11}}{11!}+\ldots$$

Sad razmišljamo kako opisati opšti član. Parni izvodi su 0 a znaci idu neizmenično.

Znači imamo $(-1)^{\text{na nešto}}\dfrac{x^{\text{neparan broj}}}{(\text{neparan broj})!}$. Neparan broj pišemo kao 2n+1 ako n ide od 0 , a možemo i kao 2n-1 ako n ide od 1. Mi ćemo uzeti 2n+1. Onda će $(-1)^n$ opisati promenu znaka, za n= 0 ide +, za n=1 ide - , itd.

Da sklopimo formulu:

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Pogledajmo sad na grafiku poklapanja za recimo stepen 5, 7 i 9.

Kod Tejlora smo videli da što je duži razvoj mora biti preciznije poklapanje, a to mora biti slučaj i kod Maklorena.

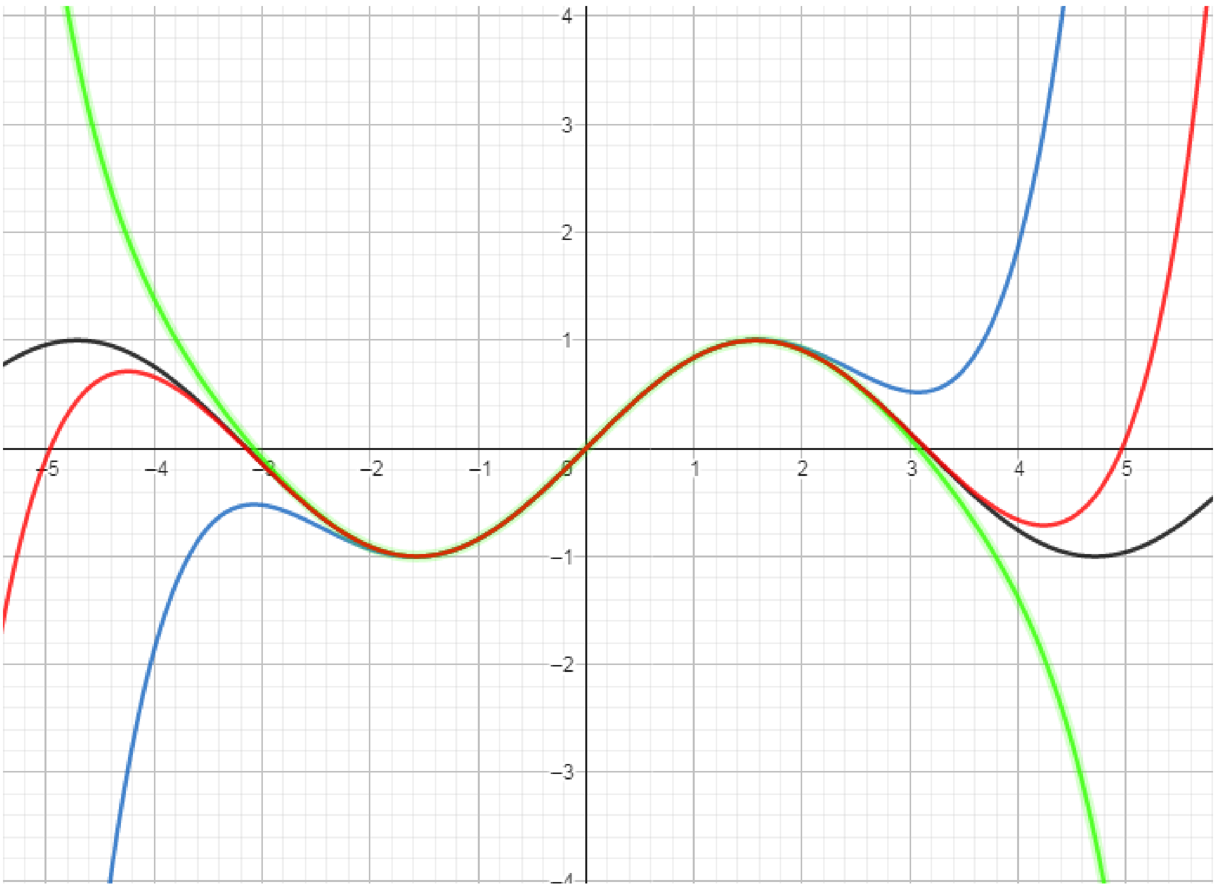
f (x) = sinx (crna)

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^6) \text{ (plava)}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + o(x^8) \text{ (zelena)}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + o(x^{10}) \text{ (crvena)}$$

Ovde u opisu beskonačno male veličine dodamo 1 stepen više zato što je, videli smo, svaki drugi izvod 0.



Primer 4.

Razviti funkciju f(x) = cos x u Maklorenov red.

Rešenje:

$$f(x)=\cos x \to f(0)=\cos 0=1$$

$$f'(x)=-\sin x \to f'(0)=-\sin 0=0$$
$$f''(x)=-\cos x \to f''(0)=-\cos 0=-1$$
$$f'''(x)=\sin x \to f'''(0)=\sin 0=0$$
$$f^{iv}(x)=\cos x \to f^{iv}(0)=\cos 0=1$$

Dalje se vrednosti ponavljaju (slično kao kod sinx).

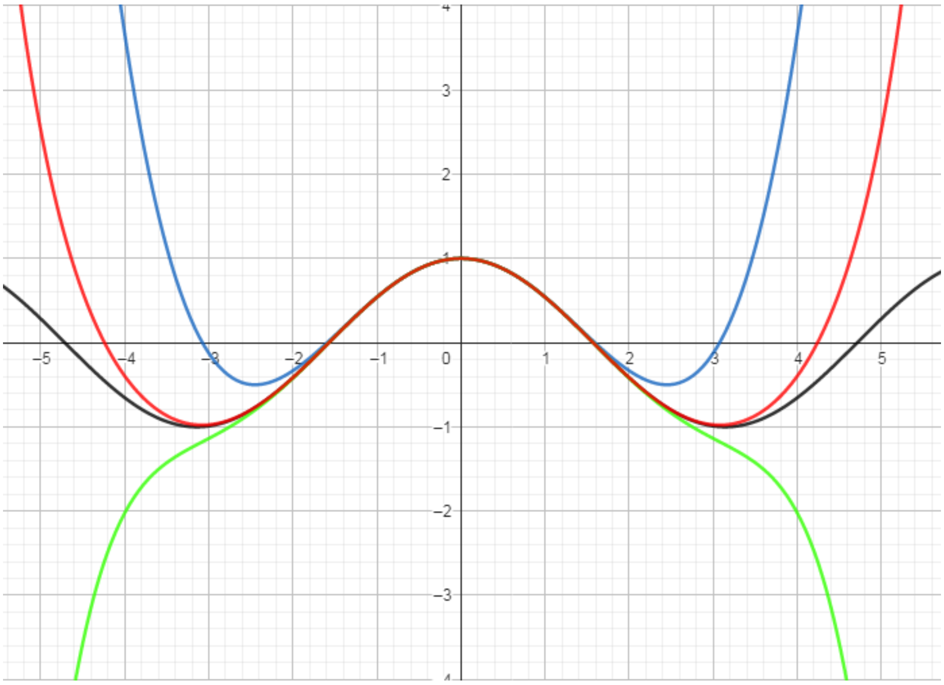
$$\cos x = f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x^1+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\ldots$$

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\frac{x^8}{8!}-\frac{x^{10}}{10!}+\ldots$$

Sad imamo da su neparni izvodi 0, a parni (2n) idu opet sa neizmeničnim znacima, pa je:

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

Evo opet sike sa poklapanjima za četvrti , šesti i osmi stepen Maklorenovog razvoja.



Primer 5.

Funkciju f (x) = e^x razviti u Maklorenov red.

Rešenje:

$f(x) = e^x \rightarrow f(0) = e^0 = 1$

Znamo da je izvod $(e^x)' = e^x$, zaključujemo das u sve vrednosti izvoda jednaki 1.

$$e^x = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x^1 + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

Ovde nije teško zaključiti da je opšti član

$\frac{x^n}{n!}$ pa je onda razvoj $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

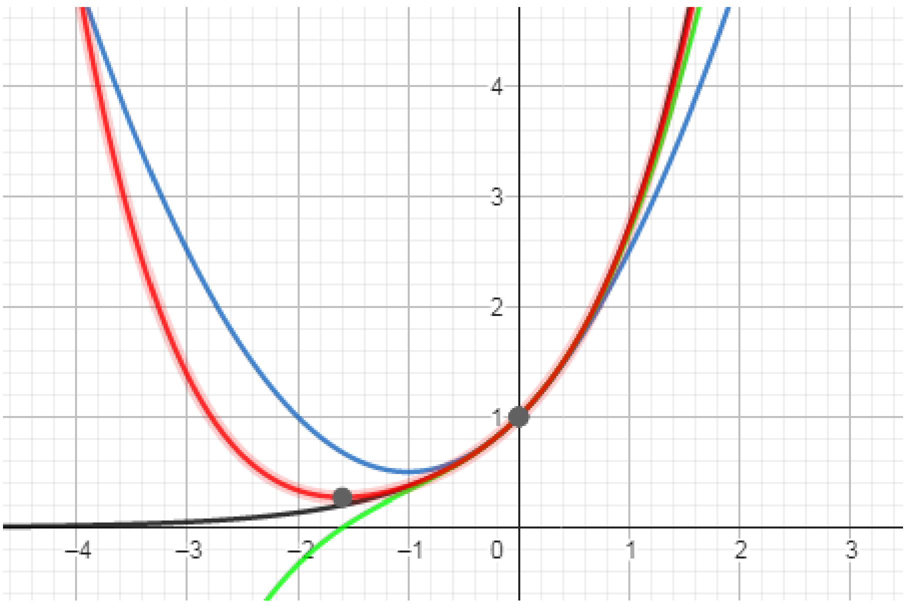
Pogledajmo i ovde kako će ići poklapanja kad povećavamo stepen razvoja:

$f(x) = e^x$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + o(x^2)$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$$



U ova tri primera za Maklorenov razvoj smo naučili da je:

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\ ,\qquad \cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\frac{x^{2n}}{(2n)!}\ \text{ i }\ e^{x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n}}{n!}\ \text{ gde }\ x\in(-\infty,\infty)\,.$$

Većina profesora dozvoljava da se ovi razvoji koriste bez izvođenja. Evo još nekoliko razvoja koji se uzimaju kao osnovni.

$$\ln(1-x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n}}{n}$$

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{n}}{n}$$

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^{n}$$

$$(1+x)^{\alpha}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^{n}$$

Ovi razvoji konvergiraju za $|x|<1$, ln(1-x) konvergira i za -1, a ln(1+x) konvergira i za x=1.

www.matematiranje.in.rs