PRIMENA TEJLOROVE I MAKLORENOVE FORMULE

1. Približno izračunavanje i procena greške

Ovde koristimo Lagranžov oblik ostatka koji beše izgleda : $R_{n,a}(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$

$c=a+\theta(x-a)$ gde je $0<\theta<1$ pa imamo $R_{n,a}(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(a+\theta(x-a))}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$

Ovo će nam biti ostatak za Tejlorovu formulu, a za Maklorenovu stavimo da je a=0 pa

dobijamo $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}$

Primer 1.

Aproksimirati funkciju $y=\sqrt{x}$ Tejlorovim polinomom trećeg stepena oko tačke $x=1$ i proceniti grešku za $x\in\left[\dfrac{9}{10},\dfrac{11}{10}\right]$

Rešenje:

Videli smo u prethodnom fajlu da kada radimo preporučeni Peanov oblik ostatka tražimo izvode do kog se razvoj traži. Međutim, za Lagranžov oblik ostatka moramo naći jedan više (onaj n+1- vi).

Znači , za naš primer tražimo 4 izvoda pošto kaže polinom trećeg stepena.

$$f(x)=\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}\to f(1)=1^{\frac{1}{2}}=1$$
$$f'(x)=\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\to f'(1)=\frac{1}{2}$$
$$f''(x)=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}-1}=-\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}\to f''(1)=-\frac{1}{4}$$
$$f'''(x)=\frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}}\to f'''(1)=\frac{3}{8}$$
$$f^{iv}(x)=-\frac{15}{16}x^{-\frac{5}{2}}\to \text{ovo nam treba za ostatak}$$

Zamenimo ovo u Tejlorovu formulu

$$T_{3,1}(x)=f(1)+\frac{f'(1)}{1!}(x-1)^1+\frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2+\frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3+R_4$$
$$\sqrt{x}\approx 1+\frac{1}{2}(x-1)-\frac{1}{8}(x-1)^2+\frac{1}{16}(x-1)^3$$

Dalje radimo procenu greške u datom intervalu:

$$R_{n,a}(x)=\frac{f^{(n+1)}(a+\theta(x-a))}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

$$R_4(x)=\frac{f^{iv}(a+\theta(x-a))}{4!}(x-1)^4$$ (ovde je $a=1$ ne mora da se piše kod R)

Vrednost četvrtog izvoda je $f^{iv}(x)=-\frac{15}{16}x^{-\frac{5}{2}}$ a umesto x pišemo $1+\theta(x-1)$

$$R_4(x)=\frac{-\frac{15}{16}(1+\theta(x-1))^{-\frac{7}{2}}}{4!}(x-1)^4=-\frac{(x-1)^4}{4!}\cdot\frac{15}{16}\cdot\frac{1}{\sqrt{(1+\theta(x-1)^7}}$$

Trebamo naći od čega je apsolutna vrednost $R_4(x)$ manja.

$$|R_4(x)|=\frac{(x-1)^4}{4!}\cdot\frac{15}{16}\cdot\frac{1}{\sqrt{(1+\theta(x-1))^7}}\le ?$$

Umesto teta ćemo staviti jedinicu, a pošto je x ispod korena **u imeniocu** uzećemo manju vrednost iz intervala koji nam je dat. Ovo $(x-1)^4$ će imati istu vrednost i za 9/10 i za 11/10.

$$|R_4(x)|=\frac{(x-1)^4}{4!}\cdot\frac{15}{16}\cdot\frac{1}{\sqrt{(1+\theta(x-1)^7}}\le\frac{(\frac{1}{10})^4}{4!}\cdot\frac{15}{16}\cdot\frac{1}{\sqrt{(1-\frac{1}{10})^7}}=\frac{1}{10^4\cdot 4!}\cdot\frac{15}{16}\cdot\frac{1}{\sqrt{(\frac{9}{10})^7}}$$

Nadalje je sve dogovor sa Vašim profesorom, ako traži broj, morate sa digitronom ako ne malo prisredite i pokratite šta ima i to je to.

Primer 2.

Izračunati $\sqrt{5}$ sa tačnošću do 10^{-4}.

Rešenje:

Iskoristićemo razvoj $(1+x)^{\alpha}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n$ samo da malo doteramo ovaj koren....

$$\sqrt{5}=\sqrt{4\cdot\frac{5}{4}}=2\sqrt{\frac{5}{4}}=2\sqrt{1+\frac{1}{4}}=2(1+\frac{1}{4})^{\frac{1}{2}}\to\alpha=\frac{1}{2}$$

Umesto x – sa ćemo staviti 1/4 a trebamo naći **n** u ostatku za čiju vrednost će ostatak biti manji od 10^{-4}.

$$\sqrt{5}=2(1+\frac{1}{4})^{\frac{1}{2}}=2\left[\binom{\frac{1}{2}}{0}\left(\frac{1}{4}\right)^0+\binom{\frac{1}{2}}{1}\left(\frac{1}{4}\right)^1+\binom{\frac{1}{2}}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^2+\ldots+\binom{\frac{1}{2}}{n}\left(\frac{1}{4}\right)^n+R_n\right]$$

Da se najpre podsetimo kako izgleda n-ti izvod za $(1+x)^{\alpha}$.

$$f(x)=(1+x)^{\alpha}$$
$$f'(x)=\alpha(1+x)^{\alpha-1}$$
$$f''(x)=\alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}$$
....
$$f^{(n)}(x)=\alpha(\alpha-1)...(\alpha-\mathrm{n}+1)(1+x)^{\alpha-n}$$

odavde će n+1 - vi izvod biti:

$$f^{(n)}(x)=\alpha(\alpha-1)...(\alpha-\mathrm{n}+1)(\alpha-\mathrm{n})(1+x)^{\alpha-n+1}$$

Za našu situaciju

$$R_n=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ n+1\end{pmatrix}(1+\theta x)^{\frac{1}{2}-n+1}\cdot x^{n+1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ n+1\end{pmatrix}(1+\theta x)^{\frac{3}{2}-n}\cdot x^{n+1}$$ stavimo da je teta = 1 i dobijamo

$$R_n=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ n+1\end{pmatrix}\left(1+\frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}-n}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ n+1\end{pmatrix}\left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{3}{2}-n}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$$

Da ne zaboravimo onu dvojku ispred zagrade...

$$2\cdot\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ n+1\end{pmatrix}\left(1+\frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}-n}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}<\frac{1}{10^4}$$

E sad je muka da se nadje n.

Mi smo prvo stavili da je n = 3 i posle sređivanja dobili da je vrednost izraza približno 0,0002, a to nam ne odgovara.

Kad stavimo n= 4 posle sređivanja dobijamo da je vrednost izraza približno 0,0000002 što zadovoljava traženu nejednakost pa zaključujemo da je n=4.

Sad se vratimo u formulu:

$$\sqrt{5}\approx 2\left[\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ 0\end{pmatrix}\left(\frac{1}{4}\right)^{0}+\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ 1\end{pmatrix}\left(\frac{1}{4}\right)^{1}+\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ 2\end{pmatrix}\left(\frac{1}{4}\right)^{2}+\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ 3\end{pmatrix}\left(\frac{1}{4}\right)^{3}+\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ 4\end{pmatrix}\left(\frac{1}{4}\right)^{4}\right]$$

$$\sqrt{5}\approx 2\left[1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}+\left(\frac{\frac{1}{2}\cdot(\frac{1}{2}-1)}{2}\right)\frac{1}{16}+\left(\frac{\frac{1}{2}\cdot(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)}{3\cdot 2\cdot 1}\right)\frac{1}{64}+\left(\frac{\frac{1}{2}\cdot(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)(\frac{1}{2}-3)}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}\right)\frac{1}{256}\right]$$

Posle sređivanja dobijamo 2,2361.

Primer 3.

Za koje vrednosti x važi približna formula $\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!}$ sa apsolutnom greškom koja je manja od 10^{-4}.

Rešenje:

Koristimo poznati razvoj $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \underbrace{\frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \dots}_{\text{ovo nam ne treba}}$

Da se podsetimo kako beše idu izvodi:

$$f'(x) = \cos x \to f'(0) = \cos 0 = 1$$
$$f''(x) = -\sin x \to f''(0) = -\sin 0 = 0$$
$$f'''(x) = -\cos x \to f'''(0) = -\cos 0 = -1$$
$$f^{iv}(x) = \sin x \to f^{iv}(0) = \sin 0 = 0$$
$$f^{v}(x) = \cos x$$

Zaključujemo da je ostatak:

$$R_n(x) = \cos\theta \mathrm{x} \cdot \frac{x^5}{5!}$$

$\left|\cos\theta \mathrm{x} \cdot \frac{x^5}{5!}\right| \le \frac{x^5}{5!} \le \frac{1}{10^4}$ odavde je

$$\mathrm{x}^5 \le \frac{120}{10000} \to \mathrm{x}^5 \le 0,012 \to |x| \le \sqrt[5]{0,012} = 0,413$$

Ovo smo dobili u radijanima , da prebacimo u stepene:

$$180^0 = \pi \text{ rad} \to 1 \text{ rad} = \frac{180^0}{\pi}$$
$$0,413 \cdot \frac{180^0}{3,14} \approx 24^0$$
$$|x| \le 24^0$$

2. Razlaganje po stepenima

Primer 4.

Razviti po stepenima razlike (x-1) polinom $P(x) = \mathrm{x}^5 + 4x^3 + 2$.

Rešenje:

Kod ovog tipa zadatka radimo Tejlorov razvoj oko tačke koju nam zadaju. Ako kažu da razvijemo po (x – *a*) razvijamo oko *a*.

$$P(x) = P(a) + \frac{P^{'}(a)}{1!}(x-a)^1 + \frac{P^{''}(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{P^{'''}(a)}{3!}(x-a)^3 + ... + \frac{P^{(n)}(a)}{\mathrm{n}!}(x-a)^n$$

Za našu situaciju je *a*=1

$$P(x) = P(1) + \frac{P^{'}(1)}{1!}(x-1)^1 + \frac{P^{''}(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{P^{'''}(1)}{3!}(x-1)^3 + \frac{P^{(\mathrm{iv})}(1)}{4!}(x-1)^4 + \frac{P^{(\mathrm{v})}(1)}{5!}(x-1)^5$$

Tražimo izvode i umesto x-sa menjamo 1.

$$P(x) = x^5 + 4x^3 + 2 \rightarrow P(1) = 1 + 4 + 2 = 7$$
$$P'(x) = 5x^4 + 12x^2 \rightarrow P'(x) = 5 + 12 = 17$$
$$P''(x) = 20x^3 + 24x \rightarrow P''(x) = 20 + 24 = 44$$
$$P'''(x) = 60x^2 + 24 \rightarrow P'''(x) = 60 + 24 = 84$$
$$P^{iv}(x) = 120x \rightarrow P^{iv}(x) = 120$$
$$P^{v}(x) = 120 \rightarrow P^{v}(1) = 120$$

$$P(x) = 7 + 17(x-1)^1 + \frac{44}{2}(x-1)^2 + \frac{84}{6}(x-1)^3 + \frac{120}{24}(x-1)^4 + \frac{120}{120}(x-1)^5$$
$$P(x) = 7 + 17(x-1) + 22(x-1)^2 + 14(x-1)^3 + 5(x-1)^4 + (x-1)^5$$

Primer 5.

Razviti po stepenima razlike (x-2) polinom $P(x) = x^4 - 5x^3 - 3x^2 + 7x + 6$

Rešenje:

Tražimo izvode i umesto x-sa menjamo 2.

$$P(x)=x^4-5x^3-3x^2+7x+6 \to P(2)=16-40-12+14+6=-16$$
$$P'(x)=4x^3-15x^2-6x+7 \to P'(2)=32-60-12+7=-33$$
$$P''(x)=12x^2-30x-6 \to P''(2)=48-60-6=-18$$
$$P'''(x)=24x-30 \to P'''(2)=48-30=18$$
$$P^{iv}(x)=24 \to P^{iv}(2)=24$$

Menjamo u formulu:

$$P(x)=P(2)+\frac{P'(2)}{1!}(x-2)^1+\frac{P''(2)}{2!}(x-2)^2+\frac{P'''(2)}{3!}(x-2)^3+\frac{P^{(iv)}(2)}{4!}(x-2)^4$$
$$P(x)=-16-33(x-2)+\frac{-18}{2}(x-2)^2+\frac{18}{6}(x-2)^3+\frac{24}{24}(x-2)^4$$
$$P(x)=-16-33(x-2)-9(x-2)^2+3(x-2)^3+(x-2)^4$$

3. Izračunavanje graničnih vrednosti (limesi)

Naučili smo već da koristimo tablicu poznatih limesa, znamo Lopitalovo pravilo. Ovo je jedna nova mogućnost za izračunavanje limesa .

Ovde ćemo koristiti poznate razvoje

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$\ln(1-x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$$

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$$

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$$

$$(1+x)^\alpha=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n$$
,

a ostatak ćemo pisati u Peanovom obliku.

Uvek je pitanje koliko uzimati člana u razvoju pa staviti ono “beskonačno malo” od x na nešto…

Nema nekog univerzalnog pravila, uglavnom “pakujemo” izraze tako da nama odgovaraju u radu, u smislu da će nešto da se pokrati (potire).

Primer 6.

Izračunati $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x}-1}{\ln(1-x)}$

Rešenje:

Koristićemo razvoje $(1+x)^{\alpha}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^{n}$ i $\ln(1-x)=-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{n}}{n}$ ali je pitanje dokle ići….

$$(1+x)^{\frac{1}{3}}=\binom{\frac{1}{3}}{0}x^{0}+\binom{\frac{1}{3}}{1}x^{1}+\binom{\frac{1}{3}}{2}x^{2}+\binom{\frac{1}{3}}{3}x^{3}+.....$$

$$\ln(1-x)=-\frac{x}{1}-\frac{x^{2}}{2}-\frac{x^{3}}{6}-...$$

Ajmo recimo da presečemo kod x^2 :

$$(1+x)^{\frac{1}{3}}=\binom{\frac{1}{3}}{0}x^{0}+\binom{\frac{1}{3}}{1}x^{1}+\binom{\frac{1}{3}}{2}x^{2}+o(x^{2})=1+\frac{x}{3}-\frac{x^{2}}{6}+o(x^{2})$$

$$\ln(1-x)=-\frac{x}{1}-\frac{x^{2}}{2}+o(x^{2})$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{\ln(1-x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1+\frac{x}{3}-\frac{x^{2}}{6}+o(x^{2})-1}{-\frac{x}{1}-\frac{x^{2}}{2}+o(x^{2})}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{3}-\frac{x^{2}}{6}+o(x^{2})}{-\frac{x}{1}-\frac{x^{2}}{2}+o(x^{2})}=\lim_{x\to 0}\frac{x(\frac{1}{3}-\frac{x}{6})}{x(-1-\frac{x}{2})}$$

Skratimo x –seve, x/6 i x/2 su jednaki 0.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x(\frac{1}{3}-\frac{x}{6})}{x(-1-\frac{x}{2})}=\frac{\frac{1}{3}}{-1}=-\frac{1}{3}$$

A šta bi se desilo da smo presekli odmah kod x-sa ?

Da vidimo:

$$(1+x)^{\frac{1}{3}} = \binom{\frac{1}{3}}{0} x^0 + \binom{\frac{1}{3}}{1} x^1 + o(x) = 1 + \frac{x}{3} + o(x)$$

$$\ln(1-x) = -\frac{x}{1} + o(x) = -\mathrm{x} + o(x)$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{\ln(1-x)} = \lim_{x\to 0} \frac{1+\frac{x}{3}+o(x)-1}{-\frac{x}{1}+o(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x}{3}+o(x)}{-x+o(x)} = \text{pokratimo x-seve} = -\frac{1}{3}$$

Dakle, ideja je da se što manje mučimo! Pakujemo kako nama odgovara….

Primer 7.

Izračunati $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[6]{1+x}-\sqrt[6]{1-x}}{x}$

Rešenje:

Ovaj x u imeniocu nam kaže da razvoje u brojiocu prvo probamo da presečemo odmah iza x.

Da je dole recimo bilo x^3 sekli bi iza tog stepena u razvoju ovih u brojiocu.

(Probamo, pa ako neće produžimo malo razvoj dok ne napravimo šta nam odgovara).

$$(1+x)^{\frac{1}{6}} = \binom{\frac{1}{6}}{0} x^0 + \binom{\frac{1}{6}}{1} x^1 + o(x) = 1 + \frac{x}{6} + o(x)$$

$$(1+(-x))^{\frac{1}{6}} = \binom{\frac{1}{6}}{0} (-x)^0 + \binom{\frac{1}{6}}{1} (-x)^1 + o(x) = 1 - \frac{x}{6} + o(x)$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[6]{1+x}-\sqrt[6]{1-x}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1+\frac{x}{6}+o(x)-\left(1-\frac{x}{6}+o(x)\right)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x}{3}}{x} = \frac{1}{3}$$

Primer 8.

Izračunati $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-\sqrt{x^2-2x}\right)$

Rešenje:

Ovde nam se javlja problem što x teži beskonačnosti, a mi znamo da su Maklorenovi razvoji oko 0. Prepakujemo malo dati izraz, uzmemo smenu $\frac{1}{x}=t$, kad x teži beskonačno onda će t da teži 0, pa radimo preko razvoja.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-\sqrt{x^2-2x}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x^3(1+\frac{3}{x})}-\sqrt{x^2(1-\frac{2}{x})}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(x\sqrt[3]{(1+\frac{3}{x})}-x\sqrt{(1-\frac{2}{x})}\right)=$$

$$\lim_{x\to\infty}x\left(\sqrt[3]{(1+\frac{3}{x})}-\sqrt{(1-\frac{2}{x})}\right)=\left|\begin{matrix}\frac{1}{x}=t\\ x\to\infty\\ t\to 0\end{matrix}\right|=\lim_{t\to 0}\frac{\left(\sqrt[3]{(1+3t)}-\sqrt{(1-2t)}\right)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{(1+(3t))^{\frac{1}{3}}-(1+(-2t))^{\frac{1}{2}}}{t}$$

Pošto je dole samo t , slično kao u prethodnom primeru , gornje razvoje radimo samo do prvog stepena.

$$\lim_{t\to 0}\frac{(1+(3t))^{\frac{1}{3}}-(1+(-2t))^{\frac{1}{2}}}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{(1+\frac{1}{3}\cdot 3t+o(t))-(1+\frac{1}{2}\cdot(-2t)+o(t))}{t}=$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{2t}{t}=2$$

4. Traženje kosih (horizontalnih) asimptota

Znamo da u formulicama za kosu i horizontalnu asimptotu koristimo limese kad x teži beskonačno. Da bi upotrebili razvoje moramo kao u prethodnom primeru prepraviti zadatu funkciju da bude oblika 1/x pa da uzmemo smenu ili možemo raditi direktno kao funkcije po (1/x).

Kad sve lepo odradimo dobićemo asimptotu oblika (naravno ako ima):

$$f(x)=kx+n+nešto+o(\frac{1}{x})$$

Ako je $k\neq 0$ imaćemo kosu asimptotu, ako je k = 0 a imamo vrednost za n, imaćemo horizontalnu asimptotu.

Ovo “*nešto*” je izraz po x koji nam kaže da li je grafik iznad ili ispod kose asimptote. Ako je “*nešto*” pozitivno , grafik je iznad a ako je negativno, ispod kose asimptote.

Primer 9.

Nađi kosu asimptotu funkcije $f(x)=\sqrt[3]{x^2-x^3}$

Rešenje:

$$f(x)=\sqrt[3]{x^2-x^3}=\sqrt[3]{(-x^3)(1-\frac{1}{x})}=-x\sqrt[3]{(1-\frac{1}{x})}=-x\left(1+(-\frac{1}{x})\right)^{\frac{1}{3}}=$$

$$-x\left(1+\frac{1}{3}(-\frac{1}{x})+\left(\frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)}{2}\right)(-\frac{1}{x})^2+o((\frac{1}{x})^2)\right)=-x\left(1-\frac{1}{3x}-\frac{1}{9}\frac{1}{x^2}+o((\frac{1}{x})^2)\right)=$$

$$-x+\frac{1}{3}+\frac{1}{9x}+o(\frac{1}{x})$$

Posmatramo :

$$f(x)=\underbrace{-x+\frac{1}{3}}_{kx+n}+\underbrace{\frac{1}{9x}}_{nešto}+o(\frac{1}{x})$$

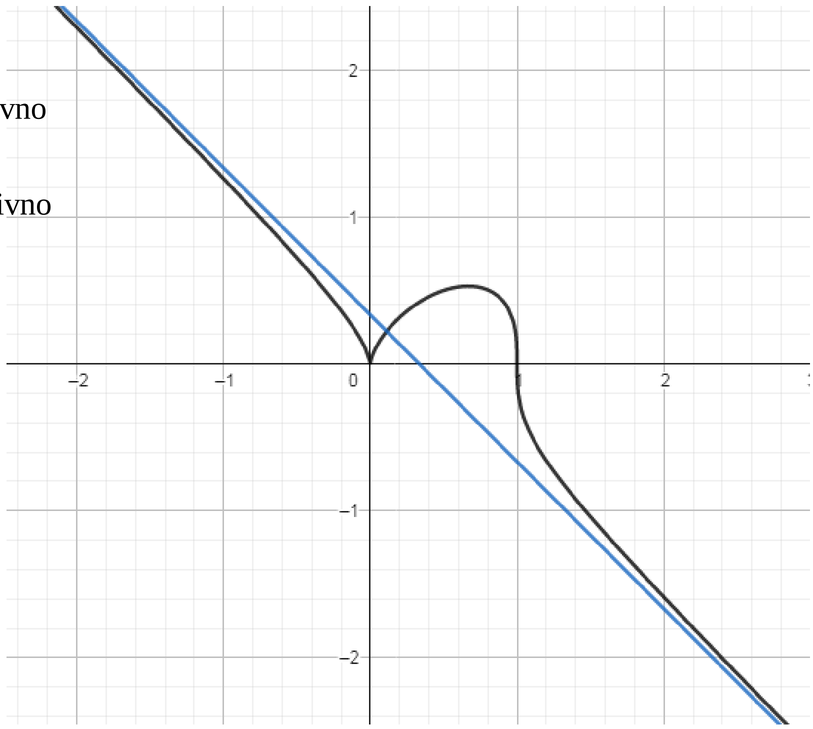
Kosa asimptota je *y* = - *x* *+1/3*

(plavo na grafiku)

nešto je 1/9x

Kad $x\to+\infty$, *nešto* je pozitivno pa je grafik iznad asimptote

Kad $x\to-\infty$, *nešto* je negativno pa je grafik ispod asimptote



Primer 10.

Nađi kosu asimptotu funkcije $f(x) = x arctg\frac{1}{x}$

Rešenje:

Arctgx ima razvoj $arctgx = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + ... + (-1)^n \frac{1}{2n+1}x^{2n+1} + o(x^{2n+1})$

Za našu situaciju nam treba do $1/x^3$.

$$f(x) = x \cdot arctg\frac{1}{x} = x \cdot \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x}\right)^3 + o(\frac{1}{x^3}) \right) = \underbrace{1}_{\substack{n=1 \\ \text{nema k}}} \underbrace{-\frac{1}{3x^2}}_{nešto} + o(\frac{1}{x^2})$$

Ovde imamo horizontalnu asimptotu y=1 a grafik je ispod i za plus i minus beskonačno jer *nešto* je uvek negativno .

www.matematiranje.in.rs