BROJNI REDOVI – ZADACI (III DEO)

ALTERNATIVNI REDOVI

Alternativni redovi su redovi sa promenljivim predznacima članova.

Oblika su $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + ... = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$

DEF: (a) Red $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ **apsolutno** konvergira ako red $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergira

(b) Red $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ **uslovno** konvergira ako on konvergira a red $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ divergira

Kriterijumi:

Lajbnicov kriterijum:

Alternativni red $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ konvergira ako je $a_n > a_{n+1}$ za n=1,2,3... (monotono opadajući) i $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ (nula niz)

Abelov kriterijum:

Red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konvergira ako:

i) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira

ii) brojevi b_n obrazuju monotono ograničen niz

Dirišleov kriterijum:

Red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konvergira ako:

i) parcijalne sume $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ su ograničene

ii) b_n monotono teži nuli kad $n \to \infty$

Teoremica (često se koristi u zadacima)

Ako je (a_n) pozitivan niz takav da je $\boxed{\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{p}{n} + o(\frac{1}{n^2})}$ kad $n \to \infty$ onda red $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$:

i) konvergira ako je $p > 0$ i to $\left\{ \begin{array}{l} \text{- apsolutno konvergira ako je } p > 1 \\ \text{- uslovno konvergira ako je } 0 < p < 1 \end{array} \right\}$

ii) divergira ako je $p \leq 0$

Još trebamo zapamtiti i da :

- Ako je red apsolutno konvergentan onda je i konvergentan.
- Zbir apsolutno konvergentnog reda ne zavisi od poretka sabiranja njegovih članova.
- Zbir uslovno konvergentnog reda promenom poretka sabiranja njegovih članova može imati proizvoljnu vrednost (Rimanova teorema)

PRIMERI

Primer 1.

Ispitati konvergenciju reda $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$

Rešenje:

Ovde je $a_n = \frac{1}{n}$

Važi da je $n < n+1 \to \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$ pa možemo zaključiti da je ovo monotono opadajući niz , još je $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{\infty} = 0$,

pa po Lajbnicovom kriterijumu ovaj red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ konvergira.

Šta je sa apsolutnom konvergencijom?

Posmatramo $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$. Za naš red je to $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, a već smo govorili da je ovaj red divergentan, pa nam to govori da red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ nije apsolutno konvergentan. **On je samo uslovno konvergentan.**

Primer 2.

Ispitati konvergenciju reda $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{2}{\sqrt{n^2+2}+n}$

Rešenje:

Najpre uočimo da je $\frac{2}{\sqrt{n^2+2}+n} > 0$ za svaki n iz skupa N.

Uočimo dalje da je :

$$
\begin{aligned}
&n+1>n\\
&(n+1)^2>n^2\\
&(n+1)^2+2>n^2+2\\
&\sqrt{(n+1)^2+2}>\sqrt{n^2+2}\\
&\sqrt{(n+1)^2+2}+(n+1)>\sqrt{n^2+2}+n\\
&\boxed{\frac{1}{\sqrt{(n+1)^2+2}+(n+1)}<\frac{1}{\sqrt{n^2+2}+n}} \to a_{n+1}<a_n
\end{aligned}
$$

Dakle, radi se o opadajućem nizu, još da nadjemo: $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+2}+n}=\frac{1}{\infty}=0$

Dakle , red $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{2}{\sqrt{n^2+2}+n}$ je konvergentan po Lajbnicovom kriterijumu.

Da ispitamo apsolutnu konvergenciju:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n \frac{2}{\sqrt{n^2+2}+n}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\sqrt{n^2+2}+n}$$

Kad $n\to\infty$ možemo razmišljati ovako:

$$\frac{2}{\sqrt{n^2+2}+n}\sim\frac{2}{\sqrt{n^2}+n}\sim\frac{2}{n+n}\sim\frac{2}{2n}\sim\frac{1}{n}$$

Dakle, ovaj red je istog **“ karaktera”** kao i red $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, koji znamo da je divergentan.

Zaključujemo da je početni red $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{2}{\sqrt{n^2+2}+n}$ **uslovno** konvergentan , jer on konvergira a $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\sqrt{n^2+2}+n}$ divergira.

Primer 3.

Ispitati konvergenciju reda $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n!}{n^n}$

Rešenje:

Ajmo ovde odmah da ispitamo apsolutnu konvergenciju: $\sum_{n=1}^{\infty} \left|(-1)^n \frac{n!}{n^n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$

Upotrebićemo Dalamberov kriterujum:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!}\cdot\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{(n+1)}\cdot\cancel{n}!}{\cancel{n}!}\cdot\frac{n^n}{\cancel{(n+1)}\,(n+1)^n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\frac{n+1}{n}}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^n = \frac{1}{e}$$

Pošto ovaj red apsolutno konvergira, odmah zaključujemo da konvergira i red $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n!}{n^n}$.

Primer 4.

Ispitati konvergenciju reda $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\cos\frac{\pi n^2}{n+1}}{\ln^2 n}$

Rešenje:

Ovde nam je ideja da upotrebimo Abelov kriterijum:

Red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konvergira ako:

i) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira

ii) brojevi b_n obrazuju monotono ograničen niz

Najpre moramo iskoristiti znanje iz jednog od trigonometrijskih fajlova:

$$\cos\frac{\pi n^2}{n+1} = (-1)^{n+1}\cos\frac{\pi}{n+1}$$

Sada posmatramo red: $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cos\frac{\pi}{n+1}}{\ln^2 n} = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\ln^2 n}\cdot\cos\frac{\pi}{n+1}$

Red $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\ln^2 n}$ je konvergentan po Abelovom kriterijumu a brojevi $\cos\frac{\pi}{n+1}$ obrazuju monoton i ograničen niz.

Primer 5.

Ispitati konvergenciju reda $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^{50} n}{n}\sin\frac{n\pi}{4}$

Rešenje:

Ovde ćemo iskoristiti Dirišleov kriterijum:

Red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konvergira ako:

i) parcijalne sume $S_n=\sum_{k=1}^{n} a_k$ su ograničene

ii) b_n monotono teži nuli kad $n\to\infty$

Upotrebićemo jedan rezultat iz prethodnih fajlova: $\left|\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{4}\right|<\frac{1}{\sin\frac{\pi}{8}}$

Još nam treba da $b_n=\frac{\ln^{50} n}{n}$ monotono teži nuli kad $n\to\infty$

Potražimo taj limes:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln^{50} n}{n}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=Lopital=50\lim_{n\to\infty}\frac{\ln^{49} n}{n}=Lopital=50\cdot 49\lim_{n\to\infty}\frac{\ln^{48} n}{n}=itd=0$$

Dakle, ispunjeni su uslovi za Dirišleovu teoremu, pa dati red konvergira.

Primer 6.

Ispitati konvergenciju reda $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^p$

Rešenje:

Ideja je da krenemo sa ispitivanjem apsolutne konvergencije: Dakle, ispitujemo $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^p$

Ovaj zadatak smo radili u jednom od prethodnih fajlova:

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^p}{\left[\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!}\right]^p}=\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n+1)!!}\frac{(2n+2)!!}{(2n)!!}\right]^p=\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n+1)(2n-1)!!}\frac{(2n+2)(2n)!!}{(2n)!!}\right]^p=\left[\frac{2n+2}{2n+1}\right]^p$$

Sad spakujemo malo ovaj izraz i upotrebljavamo binomnu formulu:

$$\left[\frac{2n+2}{2n+1}\right]^p=\left[\frac{2n+1+1}{2n+1}\right]^p=\left[1+\frac{1}{2n+1}\right]^p=$$

$$=\binom{p}{0}1^p(\frac{1}{2n+1})^0+\binom{p}{1}1^{p-1}(\frac{1}{2n+1})^1+\binom{p}{2}1^{p-2}(\frac{1}{2n+1})^2+\dots$$

$$=1+\frac{p}{2n+1}+\underline{\left|\frac{p(p+1)}{2(2n+1)^2}+o(\frac{1}{n^2})\right.}$$

$$=1+\frac{p}{2n+1}+o(\frac{1}{n^2})$$

$$=1+\frac{p}{2(n+\frac{1}{2})}+o(\frac{1}{n^2})$$

$$=1+\frac{p/2}{n+1/2}+o(\frac{1}{n^2})\ \text{ kad n} \to \infty$$

$$=1+\frac{p/2}{n}+o(\frac{1}{n^2})$$

Sad ćemo iskoristiti :

<u>Teoremica</u>

Ako je (a_n) pozitivan niz takav da je $\boxed{\frac{a_n}{a_{n+1}}=1+\frac{p}{n}+o(\frac{1}{n^2})}$ kad $n\to\infty$ onda red $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$:

i) konvergira ako je $p>0$ i to $\begin{cases}\text{- apsolutno konvergira ako je } p>1\\ \text{- uslovno konvergira ako je } 0<p<1\end{cases}$

ii) divergira ako je $p\leq 0$

Nama je :

Red konvergira za $p/2>0\to p>0$ i još $\begin{cases}\text{- apsolutno konvergira ako je } p/2>1\to\boxed{p>2}\\ \text{- uslovno konvergira ako je } 0<p/2<1\to\boxed{0<p<2}\end{cases}$

Red divergira za $p/2\leq 0\to\boxed{p\leq 0}$