SISTEMI DIFERENCIJALNIH JEDNAČINA - ZADACI

NORMALNI OBLIK

1. Reši sistem jednačina:

$$\frac{dx}{dt} = -7x + y$$
$$\frac{dy}{dt} = -2x - 2y$$

Rešenje:

Šta je ideja kod ovih zadataka?

Jednu od jednačina diferenciramo, to jest nađemo izvod cele jednačine i tu zamenimo drugu jednačinu.

Moramo da napravimo da ostane samo jedna nepoznata !

$$\frac{dx}{dt} = -7x + y$$
$$\frac{dy}{dt} = -2x - 5y$$

prvo uvedemo oznake x\` i y\` da bi lakše radili....naravno da je x\` = x\`(t) i y\` = y\` (t)

$$x` = -7x + y$$
$$y` = -2x - 5y$$

iz prve jednačine izrazimo y = x\` + 7x, a nju diferenciramo

$$x`` = -7x` + y`$$
$$y` = -2x - 5y$$

sad y\` zamenimo u prvu jednačinu, a i ovo što smo izrazili (y = x\` + 7x)

$$x`` = -7x` + (-2x - 5y) = -7x` - 2x - 5y = -7x` - 2x - 5(x` + 7x) = -7x` - 2x - 5x` - 35x = -12x` - 37x$$

$$x`` = -12x` - 37x$$

$x`` + 12x` + 37x = 0$ otarasili smo se od y, pa sad radimo kao d.j. drugog reda, dakle prvo karakterističnu jednačinu

$$\lambda^2 + 12\lambda + 37 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-12 \pm 2i}{2} \Rightarrow \lambda_1 = -6 + i, \lambda_2 = -6 - i$$

Da vas podsetimo malo teorije iz ovog dela...

LINEARNA HOMOGENA D.J. SA KONSTANTNIM KOEFICIJENTIMA

$y`` + a_1 y` + a_2 y = o$

Njoj najpre pridružujemo karakterističnu jednačinu:

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0$$

U zavisnosti od rešenja karakteristične jednačine razlikujemo tri slučaja:

1) λ_1 i λ_2 su realna i različita, onda je : y(x)= $c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$

2) λ_1 i λ_2 su realna i jednaka rešenja , onda je : y(x)= $c_1 e^{\lambda_1 x}$ +x $c_2 e^{\lambda_2 x}$

3) λ_1 i λ_2 su konjugovano kompleksni brojevi : λ_1=a+bi, λ_2=a-bi , onda je :

$y(x)=c_1 e^{ax}\cos bx + c_2 e^{ax}\sin bx$

Pošto su naša rešenja $\lambda_1 = -6+i, \lambda_2 = -6-i$, očigledno je a = -6 i b = 1, pa je rešenje:

$$\boxed{x_t = c_1 e^{-6t}\cos t + c_2 e^{-6t}\sin t}$$

Da nađemo sada y_t. Već smo izrazili y = x` + 7x ali ovde treba x', pa ćemo dobijeno rešenje po x diferencirati i to zameniti u ovo.

$$x_t = c_1 e^{-6t}\cos t + c_2 e^{-6t}\sin t$$

$x`_t = c_1(-6e^{-6t}\cos t - e^{-6t}\sin t) + c_2(-6e^{-6t}\sin t + e^{-6t}\cos t)$ **zamenimo u y = x` + 7x**

$$y_t = c_1(-6e^{-6t}\cos t - e^{-6t}\sin t) + c_2(-6e^{-6t}\sin t + e^{-6t}\cos t) + 7(c_1 e^{-6t}\cos t + c_2 e^{-6t}\sin t)$$

$$y_t = -c_1 6e^{-6t}\cos t - c_1 e^{-6t}\sin t - c_2 6e^{-6t}\sin t + c_2 e^{-6t}\cos t + 7c_1 e^{-6t}\cos t + 7c_2 e^{-6t}\sin t$$

$$y_t = c_1 e^{-6t}\cos t - c_1 e^{-6t}\sin t + c_2 e^{-6t}\sin t + c_2 e^{-6t}\cos t$$

$$y_t = c_1(e^{-6t}\cos t - e^{-6t}\sin t) + c_2(e^{-6t}\sin t + e^{-6t}\cos t)$$

Dakle , konačno rešenje je :

$$\boxed{\begin{aligned} x_t &= c_1 e^{-6t}\cos t + c_2 e^{-6t}\sin t \\ y_t &= c_1(e^{-6t}\cos t - e^{-6t}\sin t) + c_2(e^{-6t}\sin t + e^{-6t}\cos t) \end{aligned}}$$

2. Reši sistem jednačina:

$$\frac{dx}{dt} = x + 2y + t$$
$$\frac{dy}{dt} = 2x + y + t$$

Rešenje:

$x` = x + 2y + t$
$y` = 2x + y + t$

ne zaboravimo: x` = x`(t) i y` = y` (t)

Kao i malopre, prvu jednačinu ćemo diferencirati x`` = x` + 2y` + 1 , i y` zameniti iz druge jednačine.

Y moramo izraziti iz prve i to zameniti u x`` = x` + 2y` + 1.

$$x` = x + 2y + t \Rightarrow 2y = x` - x - t \Rightarrow y = \frac{x` - x - t}{2}$$

x`` = x` + 2y` + 1

$x`` = x` + 2(x + y + t) + 1$

$x`` = x` + 2x + 2y + 2t + 1$

$x`` = x` + 2x + 2\frac{x` - x - t}{2} + 2t + 1$ sredimo...

$x`` - 2x` - 3x = t + 1$ ovo je nehomogena linearna d.j.(podseti se...)

$x`` - 2x` - 3x = 0$

$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$

$\lambda_{1,2} = \frac{2 \pm 4}{2} \Rightarrow \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 3$ pa je homogeno rešenje po x jednako:

$x_t(H) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{3t}$ Sada imamo 2 opcije: Metodu varijacije konstanata ili metodu neodređenih koeficijenata.

Mislimo da je bolje(lakše) ići na neodređene koeficijente.

$$\left.\begin{array}{l} X = At + B \\ X` = A \\ X`` = 0 \end{array}\right\}$$ Ovo zamenimo u $x`` - 2x` - 3x = t + 1$

-2 A –3 (At+B) = t + 1

-2 A –3 At-3B = t + 1

-3At –2A-3B = t + 1 pa je odavde -3A=1 i -2A-3B=1 pa je $A = -\frac{1}{3}$ i $B = -\frac{1}{9}$, to jest

X = $-\frac{1}{3}$t $-\frac{1}{9}$

Dakle : $x_t = c_1 e^{-t} + c_2 e^{3t} - \frac{t}{3} - \frac{1}{9}$ **je rešenje po x**

Kako je $y = \frac{x` - x - t}{2}$, naći ćemo izvod od $x_t = c_1 e^{-t} + c_2 e^{3t} - \frac{t}{3} - \frac{1}{9}$ i to zameniti u y.

$$x_t = c_1 e^{-t} + c_2 e^{3t} - \frac{t}{3} - \frac{1}{9}$$

$$x`_t = -c_1 e^{-t} + 3c_2 e^{3t} - \frac{1}{3}$$

$y_t = \frac{1}{2}[(-c_1 e^{-t} + 3c_2 e^{3t} - \frac{1}{3})$ - $(c_1 e^{-t} + c_2 e^{3t} - \frac{t}{3} - \frac{1}{9})$ - t] sredimo ....

$$y_t = -c_1 e^{-t} + c_2 e^{3t} - \frac{t}{3} - \frac{1}{9}$$

Dakle, konačno rešenje je :

$$\boxed{\begin{aligned} x_t &= c_1 e^{-t} + c_2 e^{3t} - \frac{t}{3} - \frac{1}{9} \\ y_t &= -c_1 e^{-t} + c_2 e^{3t} - \frac{t}{3} - \frac{1}{9} \end{aligned}}$$

3. Reši sistem jednačina:

$$\frac{dy}{dx} = y + z + x$$
$$\frac{dz}{dx} = -4y - 3z + 2x$$

Rešenje:

$$y` = y + z + x$$
$$z` = -4y - 3z + 2x$$

ovde je z=z(x) i y=y(x)

Izrazimo z iz prve jednačine $y` = y + z + x \Rightarrow y` - y - x = z$

Diferencirajmo prvu jednačinu:

$y`` = y` + z` + 1$ i zamenimo ovde z` i z

$$y`` = y` + (-4y - 3z + 2x) + 1 = y` - 4y - 3z + 2x + 1 = y` - 4y - 3(y` - y - x) + 2x + 1$$

$y`` = y` - 4y - 3y` + 3y + 3x + 2x + 1$ **sredimo...**

$y`` + 2y` + y = 5x + 1$ **ovo je nehomogena linearna d.j. drugog reda**

$$y`` + 2y` + y = 0$$

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2 \pm 0}{2} \Rightarrow \lambda_1 = -1, \lambda_2 = -1$$

$y_x(H) = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x}$ našli smo homogeno rešenje, opet biramo metodu neodređenih koeficijenata

$$\left.\begin{array}{l} Y = Ax + B \\ Y` = A \\ Y`` = 0 \end{array}\right\}$$

ovo menjamo u $y`` + 2y` + y = 5x + 1$

$$0 + 2A + Ax + B = 5x + 1$$

$Ax + 2A + B = 5x + 1$ **pa je odavde A = 5 i 2A+B = 1, to jest A= 5 i B =-9**

Y= Ax+B pa je Y = 5x-9 , vratimo se u homogeno rešenje

$$y_x(H) = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} + Y$$

$y_x = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} + 5x - 9$ dobili smo rešenje po y, sad da nađemo po z, ali najpre da nadjemo izvod od y_x

$y`_x = -c_1 e^{-x} + c_2(e^{-x} - x e^{-x}) + 5$ zamenimo u $z = y` - y - x$

$z_x = -c_1 e^{-x} + c_2(e^{-x} - x e^{-x}) + 5 - (c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} + 5x - 9) - x$ sredimo

$z_x = (c_2 - 2c_1 - 2c_2 x)e^{-x} - 6x + 14$ dobili smo rešenje po z dakle, konačno rešenje je :

$$\boxed{\begin{aligned} y_x &= c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} + 5x - 9 \\ z_x &= (c_2 - 2c_1 - 2c_2 x)e^{-x} - 6x + 14 \end{aligned}}$$

4. Reši sistem jednačina:

$$\frac{dx}{dt} = y + z$$
$$\frac{dy}{dt} = x + z$$
$$\frac{dz}{dt} = x + y$$

Rešenje:

$x` = y + z$
$y` = x + z$ **Naravno i ovde je x` = x`(t), y` = y` (t) i z` = z`(t)**
$z` = x + y$

Prvu jednačinu ćemo diferencirati: $x`` = y` + z`$ i tu zameniti y` i z` , dakle :

$x`` = y` + z`$ **=(** x +z) + (x + y) = 2x + **y + z,** a pošto je $x` = y + z$ to je

x`` = 2x + x` odnosno x`` - x` - 2x = 0

x`` - x` - 2x = 0 ovo je homogena linearna d.j. drugog reda

$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$ karakteristična jednačina

$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm 3}{2} \Rightarrow \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 2$ pa je rešenje po x :

$x_t = c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t}$ Sada tražimo rešenja po y i po z .Vratimo se na početni sistem:

$x` = y + z$
$y` = x + z$ **Oduzmimo od treće prvu jednačinu!**
$z` = x + y$

z` - x` = x – z Ovde ćemo zameniti x sa onim što smo izračunali $x_t = c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t}$ a kad nađemo izvod od ovoga dobijamo i x`

$x_t = c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t}$

$x`_t = -c_1 e^{-t} + 2c_2 e^{2t}$

z` - x` = x – z zamenimo x i x`

z` - $(-c_1 e^{-t} + 2c_2 e^{2t}) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t}$ - z ovo malo prisredimo...

z ` + z = $3c_2 e^{2t}$ **Ovo je linearna d.j. po z**

z(t)=$e^{-\int p(t)dt}(c_3 + \int q(t)e^{\int p(t)dt} dt)$

$\int p(t)dt = \int 1dt = t$

z(t)=$e^{-t}(c_3 + \int 3c_2 e^{2t} e^t dt)$

z(t)=$e^{-t}(c_3 + 3c_2 \int e^{3t} dt) = e^{-t}(c_3 + 3c_2 \frac{1}{3} e^{3t}) = e^{-t}(c_3 + c_2 e^{3t}) = e^{-t} c_3 + c_2 e^{2t}$

Tako smo dobili i rešenje po z : z(t) $= e^{-t} c_3 + c_2 e^{2t}$

Još da nađemo rešenje po y!

y` = x + z = $c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t} + e^{-t} c_3 + c_2 e^{2t}$

y ` = $(c_1 + c_3)e^{-t} + 2c_2 e^{2t}$ ovo naravno integralimo da bi dobili y

$y_t = \int [(c_1 + c_3)e^{-t} + 2c_2 e^{2t}]dt = -(c_1 + c_3)e^{-t} + c_2 e^{2t}$

Dakle $y_t = -(c_1 + c_3)e^{-t} + c_2 e^{2t}$

Konačno je :

$$\boxed{\begin{aligned} x_t &= c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t} \\ y_t &= -(c_1 + c_3)e^{-t} + c_2 e^{2t} \\ z_t &= e^{-t} c_3 + c_2 e^{2t} \end{aligned}}$$

5. **Reši sistem jednačina:** $\begin{matrix} x`-2x-4y=\cos t \\ y`+x+2y=\sin t \end{matrix}$ **i nađi rešenje za koje je x(0) = 4 i y(0) = 1**

Rešenje:

Najpre ćemo iz prve jednačine izraziti y:

$$x`-2x-4y=\cos t$$
$$x`-2x-\cos t=4y$$
$$y=\frac{x`-2x-\cos t}{4}$$

Sada ćemo diferencirati prvu jednačinu iz sistema:

$$x`-2x-4y=\cos t$$

$x``-2x`-4y`=-\sin t$ **ovde zamenimo y`**

x`` - 2x` -4(sin t –x – 2y)= - sin t

x``- 2x` - 4 sint + 4x +8y = - sint **zamenimo y**

x``- 2x` - 4 sint + 4x +8 $\frac{x`-2x-\cos t}{4}$ = - sin t sredimo...

x`` = 3sin t + 2cos t **diferenciramo**

$$x`=\int(3\sin t+2\cos t)dt=-3\cos t+2\sin t+c_1$$

$x`=-3\cos t+2\sin t+c_1$ **opet diferenciramo**

$x=\int(-3\cos t+2\sin t+c_1)dt=-3\sin t-2\cos t+c_1t+c_2$ **Dakle, našli smo x_t**

$$\mathbf{x_t}=-3\sin t-2\cos t+c_1t+c_2$$

Da bi našli y , poći ćemo od $y=\frac{x`-2x-\cos t}{4}$

$y=\frac{x`-2x-\cos t}{4}=\frac{1}{4}$ **[**$(-3\cos t+2\sin t+c_1)$**-** $2(-3\sin t-2\cos t+c_1t+c_2)$**-** cost**]** **sredimo...**

$$\mathbf{y_t}=\frac{1}{4}(8\sin t-2c_1t-2c_2+c_1)$$

Dobili smo opšte rešenje:

$$\begin{aligned} \mathbf{x_t} &= -3\sin t - 2\cos t + c_1 t + c_2 \\ \mathbf{y_t} &= \frac{1}{4}(\,8 \sin t - 2c_1 t - 2c_2 + c_1) \end{aligned}$$

Da nađemo ono koje zadovoljava uslove: **x(0) = 4 i y(0) = 1**

4 = $-3\sin 0 - 2\cos 0 + c_1 0 + c_2$ **odavde je očigledno c_2=4**

1 = $\frac{1}{4}(\,8 \sin 0 - 2c_1 0 - 2c_2 + c_1)$ **odavde dobijamo c_1= 16**

Traženo rešenje koje zadovoljava date uslove je :

$$\begin{aligned} \mathbf{x_t} &= -3\sin t - 2\cos t + 16t + 4 \\ \mathbf{y_t} &= 2\sin t - 8t + 1 \end{aligned}$$

SIMETRIČNI OBLIK

1. Nalaženjem prvih integrala reši sistem:

$$\frac{dx}{xz} = \frac{dy}{yz} = \frac{dz}{-xy}$$

Rešenje:

Uzećemo prva dva člana ove jednakosti:

$\frac{dx}{xz} = \frac{dy}{yz}$ očigledno možemo sve pomnožiti sa z

$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}$ integralimo

$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{dy}{y}$ pa je $\ln|x| = \ln|y| + \ln|c_1|$ odnosno $\ln|x| = \ln|yc_1|$ a odavde je $|x| = |yc_1|$ to jest

x = y c_1 pa je $c_1 = \frac{x}{y}$ prvi prvi integral .

Dakle $c_1 = \frac{x}{y}$ **je prvi prvi integral.**

U većini zadataka nije teško naći prvi prvi integral, ali kod drugog prvog integrala nastaju problemi...

Uvek imate opciju da iz dobijenog rešenja izrazite jednu nepoznatu i to zamenite u početnu datu jednačinu.

Možete probati da preko nekog trika olakšate sebi posao.....Recimo za naš primer :

$\frac{dx}{xz} = \frac{dy}{yz} = \frac{dz}{-xy}$ **Ideja je da prvom članu jednakosti dodamo y i gore i dole,a drugom članu x**

$\frac{ydx}{yxz} = \frac{xdy}{xyz} = \frac{dz}{-xy}$ **Saberemo sad prva dva člana jednakosti**

$\frac{ydx + xdy}{2xyz} = \frac{dz}{-xy}$ **ydx + xdy možemo zapisati kao ydx + xdy = d(xy)**

$\frac{d(xy)}{2xyz} = \frac{dz}{-xy}$ **sve pomnožimo sa xy**

$\frac{d(xy)}{2z} = \frac{dz}{-1}$ odavde je **d(xy) = -2z dz** pa kad to integralimo, dobijamo **xy = -z^2 + c_2** odakle je **c_2=xy + z^2**

a to je traženi **drugi prvi integral**

Rešenje je dakle:

$c_1 = \frac{x}{y}$ **prvi prvi integral**

c_2 = xy + z^2 **drugi prvi integral**

Ove dve relacije definišu opšti integral sistema!

2. Nalaženjem prvih integrala reši sistem:

$$\frac{dx}{y-z}=\frac{dy}{z-x}=\frac{dz}{y-x}$$

Rešenje:

Sabraćemo prva dva člana jednakosti:

$\frac{dx+dy}{y-x}=\frac{dz}{y-x}$ sve pomnožimo sa y - x

dx + dy = dz ovo integralimo

$x + y = z + c_1$ odavde je **$c_1 = x + y - z$** **evo ga prvi prvi integral**

Izrazimo odavde $z = x + y - c_1$ i to zamenimo u prva dva člana jednakosti

$$\frac{dx}{y-z}=\frac{dy}{z-x}$$

$\frac{dx}{y-(x+y-c_1)}=\frac{dy}{(x+y-c_1)-x}$ oslobodimo se zagrada i prisredimo...

$\frac{dx}{-x-c_1}=\frac{dy}{y-c_1}$ napravimo male izmene...

$\frac{dy}{dx}=\frac{y-c_1}{-x-c_1}$ odnosno $y`=\frac{y-c_1}{-x-c_1}$ pa je $y`=-\frac{y}{x+c_1}+\frac{c_1}{x+c_1}$ odavde je

$y`+\frac{y}{x+c_1}=\frac{c_1}{x+c_1}$ **a ovo je linearna d.j. prvog reda**

$$y(x)=e^{-\int p(x)dx}(c_2+\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx)$$

$$\int p(x)dx=\int\frac{1}{x+c_1}dx=\ln|x+c_1|$$

$y(x)=e^{-\int p(x)dx}(c_2+\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx)=e^{-\ln|x+c_1|}(c_2+\int\frac{c_1}{x+c_1}(x+c_1)dx)=\frac{1}{x+c_1}(c_2+c_1x)$ Dakle:

$y=\frac{1}{x+c_1}(c_2+c_1x)$ vratimo ovde da je **$c_1 = x + y - z$** i sredimo…

$y = \frac{1}{x+x+y-z}(c_2 + x(x+y-z))$

$y = \frac{c_2 + x^2 + xy - xz}{2x+y-z}$

$2xy + y^2 - yz = c_2 + x^2 + xy - xz$ odavde izrazimo c_2

$2xy + y^2 - yz - x^2 - xy + xz = c_2$ to jest

$c_2 = xy + y^2 - yz - x^2 + xz$ **je drugi prvi integral**

Relacije koje definišu opšti integral sistema su :

$c_1 = x + y - z$	**prvi prvi integral**
$c_2 = xy + y^2 - yz - x^2 + xz$	**drugi prvi integral**

Nećemo vas više ovde mučiti sa sistemima u simetričnom obliku jer se parcijalne diferencijalne jednačine rade preko ovakvih sistema, pa ćemo tu " utvrditi gradivo".