DIFERENCIJALNE JEDNAČINE I REDA – ZADACI

1. Reši diferencijalnu jednačinu: $x(1+y^2) = y\,y`$

Rešenje:

$x(1+y^2) = y\,y`$

$x(1+y^2) = y\,\frac{dy}{dx}$ sve pomnožimo sa dx ($dx \neq 0$) i podelimo sa $1+y^2$

$x\,dx = \frac{ydy}{1+y^2}$ znači ovo je diferencijalna jednačina koja razdvaja promenljive!

$\int xdx = \int \frac{ydy}{1+y^2}$ integral na levoj strani je tablični a za ovaj na desnoj strani uzimamo smenu.

$$\frac{x^2}{2} = \int \frac{ydy}{1+y^2} = \begin{vmatrix} 1+y^2 = t \\ 2ydy = dt \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\ln|t| + c = \frac{1}{2}\ln\left|1+y^2\right| + c$$

Dakle:

$\boxed{\frac{x^2}{2} = \frac{1}{2}\ln\left|1+y^2\right| + c}$ je opšte rešenje ove diferencijalne jednačine.

2. Reši diferencijalnu jednačinu: $x^2 = 3y^2 y`$

Rešenje:

$x^2 = 3y^2 y`$

$x^2 = 3y^2\frac{dy}{dx}$ sve pomnožimo sa dx ($dx \neq 0$)

$x^2dx = 3y^2dy$ diferencijalna jednačina koja razdvaja promenljive!

$\int x^2dx = \int 3y^2dy$ oba su tablična

$$\frac{x^3}{3} = 3\frac{y^3}{3} + c$$

$\boxed{\frac{x^3}{3} = y^3 + c}$ ovo je opšte rešenje

3. Reši diferencijalnu jednačinu: $y` = \dfrac{2x+y}{2x}$

Rešenje:

$$y` = \frac{2x+y}{2x}$$

$$y` = \frac{x(2+\frac{y}{x})}{2x}$$

$$y` = \frac{2+\frac{y}{x}}{2}$$ ovo je homogena d.j.

Uzimamo smenu : $\dfrac{y}{x} = z \Rightarrow y = zx \Rightarrow y` = z`x + z$

$$z`x + z = \frac{2+z}{2}$$

$$z`x = \frac{2+z}{2} - z$$

$$z`x = \frac{2+z-2z}{2}$$

$$z`x = \frac{2-z}{2}$$ ovo je diferencijalna jednačina koja razdvaja promenljive z`$=\dfrac{dz}{dx}$

$$\frac{dz}{dx}x = \frac{2-z}{2}$$

$$\frac{dz}{2-z} = \frac{1}{2}\frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{dz}{2-z} = \int \frac{1}{2}\frac{dx}{x}$$

$$-\ln|2-z| = \frac{1}{2}\ln|x| + \ln c$$ trik je da kada su sva rešenja po ln da se doda lnc umesto c

$$\ln|2-z|^{-1} = \ln|x|^{\frac{1}{2}} + \ln c$$

$$\ln|2-z|^{-1} = \ln|x|^{\frac{1}{2}}c$$ antilogaritmujemo

$$|2-z|^{-1} = |x|^{\frac{1}{2}}c$$

$$\frac{1}{2-z} = \sqrt{x}c$$ vratimo smenu $\dfrac{y}{x} = z$

$$\frac{1}{2-\frac{y}{x}} = \sqrt{x}c$$ **ovo je opšte rešenje, ako zahteva vaš profesor odavde izrazite *y***

4. Reši diferencijalnu jednačinu: $\mathbf{xy^2dy = (x^3 + y^3)dx}$

Rešenje: $xy^2dy = (x^3 + y^3)dx$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^3 + y^3}{xy^2}$$ gore izvlačimo x^3

$$y` = \frac{x^3(1+\frac{y^3}{x^3})}{xy^2}$$

$$y` = \frac{x^2(1+\frac{y^3}{x^3})}{y^2}$$ spustimo x^2 dole ispod y^2

$$y` = \frac{(1+\frac{y^3}{x^3})}{\frac{y^2}{x^2}}$$

$$y` = \frac{1+(\frac{y}{x})^3}{(\frac{y}{x})^2}$$ jasno je da je ovo homogena d.j.

Uzimamo smenu : $\frac{y}{x} = z \Rightarrow y = zx \Rightarrow y` = z`x + z$

$$z`x + z = \frac{1+z^3}{z^2}$$

$$z`x = \frac{1+z^3}{z^2} - z$$

$$z`x = \frac{1+z^3 - z^3}{z^2}$$

$$z`x = \frac{1}{z^2}$$ razdvaja promenljive $z` = \frac{dz}{dx}$

$$\frac{dz}{dx}x = \frac{1}{z^2}$$

$$z^2dz = \frac{dx}{x}$$

$$\int z^2dz = \int \frac{dx}{x}$$

$\frac{z^3}{3} = \ln|x| + c$ vratimo smenu $\frac{y}{x} = z$ pa je $\boxed{\frac{(\frac{y}{x})^3}{3} = \ln|x| + c}$ opšte rešenje

5. Reši diferencijalnu jednačinu: xy` - x^2 +2y = 0

Rešenje: xy` - x^2 +2y = 0

xy` + 2y = x^2 sve podelimo sa x ($x \neq 0$)

$y`+\frac{2}{x}y = x$ ovo je linearna d.j. p(x)=$\frac{2}{x}$ i q(x)= x

Opšte rešenje ove d.j. dato je formulom y = $e^{-\int p(x)dx}(c+\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx)$

Nađimo prvo rešenje integrala $\int p(x)dx$

$$\int p(x)dx = \int \frac{2}{x}dx = 2\ln|x| = \ln|x|^2$$

$$\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx = \int xe^{\ln x^2}dx = \int xx^2dx = \int x^3dx = \frac{x^4}{4}$$

y = $e^{-\int p(x)dx}(c+\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx) = e^{-\ln x^2}[c+\frac{x^4}{4}] = \frac{1}{x^2}[c+\frac{x^4}{4}]$ dakle:

$\boxed{y = \frac{1}{x^2}[c+\frac{x^4}{4}]}$ je opšte rešenje.

6. **Reši diferencijalnu jednačinu: y` -2xy = (x – x^3)e^{x^2}**

Rešenje: y` -2xy = (x – x^3)e^{x^2} ovo je linearna d.j. p(x)= - 2x i q(x)= (x – x^3)e^{x^2}

Nađimo prvo rešenje integrala $\int p(x)dx$

$$\int p(x)dx = \int (-2x)dx = -2\int xdx = -2\frac{x^2}{2} = -x^2$$

$$\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx = \int (x-x^3)e^{x^2}e^{-x^2}dx = \int (x-x^3)dx = \frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4}$$

Sada je konačno rešenje :

y = $e^{-\int p(x)dx}(c+\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx) = e^{x^2}[c+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4}]$

$\boxed{y = e^{x^2}[c+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4}]}$

7 . Reši diferencijalnu jednačinu: $y` \cos^2 x = tg\, x - y$ i nađi ono partikularno rešenje koje zadovoljava uslove : x=0 i y= 0

Rešenje: Najpre ćemo rešiti datu diferencijalnu jednačinu a zatim naći vrednost konstante za date uslove.

$y` \cos^2 x = tg\, x - y$

$y` \cos^2 x + y = tg\, x$ sve podelimo sa $\cos^2 x$

$y` + \frac{1}{\cos^2 x} y = \frac{tgx}{\cos^2 x}$ ovo je linearna d.j.

$$p(x) = \frac{1}{\cos^2 x} .... q(x) = \frac{tgx}{\cos^2 x}$$

Nađimo, kao i obično, prvo rešavamo integral $\int p(x)dx$

$$\int p(x)dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = tg\, x$$

$$\int q(x) e^{\int p(x)dx} dx = \int \frac{tgx}{\cos^2 x} e^{tgx} dx = \left| \begin{array}{c} tgx = t \\ \frac{1}{\cos^2 x} dx = dt \end{array} \right| = \int te^t dt = \text{parcijalna integracija......} =$$

$$\left| \begin{array}{cc} t = u & e^t dt = dv \\ dt = du & e^t = v \end{array} \right| = te^t - e^t = tgxe^{tgx} - e^{tgx}$$

$$y = e^{-\int p(x)dx} \left(c + \int q(x) e^{\int p(x)dx} dx\right) = e^{-tgx}[c + tgxe^{tgx} - e^{tgx}]$$

$$\boxed{y = e^{-tgx} c + tgx - 1 \quad \text{opšte rešenje}}$$

Menjamo ovde x=0 i y= 0

$0 = e^{-tg0} c + tg0 - 1$
$0 = c - 1$

$c = 1$ sad ovo vratimo u opšte rešenje $y = e^{-tgx} 1 + tgx - 1 = e^{-tgx} + tgx - 1$

8. Reši diferencijalnu jednačinu: $xy` - 2x^2\sqrt{y} = 4y$

Rešenje: $xy` - 2x^2\sqrt{y} = 4y$

$xy` - 4y = 2x^2\sqrt{y}$

$xy` - 4y = 2x^2 y^{\frac{1}{2}}$

$y` - \frac{4}{x}y = 2x\ y^{\frac{1}{2}}$ ovo je Bernulijeva d.j. za koju je $n = \frac{1}{2}$ pa je smena:

$y` - \frac{4}{x}y = 2x\ y^{\frac{1}{2}}$ sve podelimo sa $y^{\frac{1}{2}}$

$y^{1-n} = u$

$y^{\frac{1}{2}} = u$

$\frac{1}{2}y^{\frac{-1}{2}}y` = u`$

$\frac{y`}{y^{\frac{1}{2}}} = 2u`$

Vratimo se u jednačinu:

$$\frac{y`}{y^{\frac{1}{2}}} - \frac{4}{x}\frac{y}{y^{\frac{1}{2}}} = 2x$$

$2u` - \frac{4}{x}u = 2x$ sve podelimo sa 2

$u` - \frac{2}{x}u = x$ ovo je linearna d.j. po u

$$u(x) = e^{-\int p(x)dx}(c + \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx)$$

$$\int p(x)dx = \int(-\frac{2}{x})dx = -2\ln|x| = \ln|x|^{-2} = \ln\frac{1}{x^2}$$

$$\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx = \int xe^{\ln x^{-2}}dx = \int x\frac{1}{x^2}dx = \int\frac{1}{x}dx = \ln|x|$$

$$u(x) = e^{-\int p(x)dx}(c + \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx) = e^{\ln x^2}[c + \ln|x|]$$

$u(x) = x^2[c + \ln|x|]$ rešenje linearne po u, vratimo smenu: $\sqrt{y} = u$

$\sqrt{y} = x^2[c + \ln|x|]$ kvadriramo

$\boxed{y = x^4[c + \ln|x|]^2 \quad \text{opšte rešenje}}$

9. Odredi ono rešenje diferencijalne jednačine $(x^2+y^2+2x)dx+2ydy=0$ koje zadovoljava početni uslov y(0)=1

Rešenje: Najpre ćemo rešiti datu diferencijalnu jednačinu a zatim naći vrednost konstante za dati uslov.

$(x^2+y^2+2x)dx+2ydy=0$ podelimo sve sa dx

$x^2+y^2+2x+2yy'=0$ podelimo sve sa 2y

$$\frac{x^2+2x}{2y}+\frac{1}{2}y+y'=0$$

$y'+\frac{1}{2}y=-\frac{x^2+2x}{2}y^{-1}$ ovo je Bernulijeva d.j. za koju je n = - 1

$$y^{1-n}=u$$

smena je : $y^2=u$

$$2yy'=u'$$

$y'+\frac{1}{2}y=-\frac{x^2+2x}{2}y^{-1}$ sve pomnozimo sa 2 y

$$2yy'+y^2=-\left(x^2+2x\right)$$

$u'+u=-\left(x^2+2x\right)$ ovo je linearna po u

u(x) = $e^{-\int p(x)dx}(c+\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx)$

$$\int p(x)dx=\int 1dx=x$$

$$\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx=-\int(x^2+2x)e^x dx=\begin{vmatrix} x^2+2x=u & e^x dx=dv \\ (2x+2)dx=du & e^x=v \end{vmatrix}=$$

$$-e^x(x^2+2x)+\int e^x(2x+2)dx=\begin{vmatrix} 2x+2=u & e^x dx=dv \\ 2dx=du & e^x=v \end{vmatrix}=$$

$$-e^x(x^2+2x)+[e^x(2x+2)-\int 2e^x dx]$$

$$-e^x(x^2+2x)+e^x(2x+2)-2e^x=$$

$$e^x(-x^2\cancel{-2x}\cancel{+2x}\cancel{+2}\cancel{-2})=-x^2e^x$$

u(x) = $e^{-\int p(x)dx}(c+\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx)$

u(x) = $e^{-x}[c - x^2 e^x] = \boxed{e^{-x} \cdot c - x^2} =$

vratimo smenu :

$\boxed{y^2 = e^{-x} \cdot c - x^2 \quad \text{i evo ga opšte rešenje .}}$ Stavimo x = 0 i y = 1

1 = c , pa je odavde c = 1 i partikularno rešenje je :

$y^2 = e^{-x} - x^2$

10. Reši diferencijalnu jednačinu: $(2xy + 3y^2)dx + (x^2 + 6xy - 3y^2)dy = 0$

Rešenje: Proverimo da li je ovo jednačina sa totalnim diferencijalom:

P(x,y)= $2xy+3y^2$

Q(x,y) = $x^2 + 6xy - 3y^2$

$\frac{\partial P}{\partial y} = 2x + 6y$ i $\frac{\partial Q}{\partial x} = 2x + 6y$

Pošto je $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, ovo jeste d.j.sa totalnim diferencijalom.

Rešavamo je preko formule : C= $\int P(x,y)dx + \int [Q - \frac{\partial}{\partial y}\int P(x,y)dx]dy$

$$\int P(x,y)dx = \int (2xy + 3y^2)dx = 2y\frac{x^2}{2} + 3y^2 x = yx^2 + 3y^2 x$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(yx^2 + 3y^2 x) = x^2 + 6xy$$

$$c = yx^2 + 3y^2 x + \int [x^2 + 6xy - 3y^2 - x^2 - 6xy]dy$$

$$c = yx^2 + 3y^2 x + \int [-3y^2]dy$$

$\boxed{c = yx^2 + 3y^2 x - y^3 \quad \text{je opšte rešenje}}$

11. Reši diferencijalnu jednačinu: $(3x+2y+y^2)dx+(x+4xy+5y^2)dy=0$ **znajući da je njen integracioni faktor oblika** $\lambda=\lambda(x+y^2)$ **.Odrediti zatim onu integralnu krivu koja prolazi kroz tačku M(-2,1)**

Rešenje:

Ako je μ (x,y)= μ (w(x,y)) (pogledaj teoretski deo) onda je :

$$\int\frac{d\mu}{\mu}=\int\frac{\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}}{P\frac{\partial w}{\partial y}-Q\frac{\partial w}{\partial x}}dw$$ upotrebljavamo ovu formulu da nadjemo integracioni faktor

$(3x+2y+y^2)dx+(x+4xy+5y^2)dy=0$ odavde je

P(x,y)= $3x+2y+y^2$ $\quad \frac{\partial P}{\partial y}=2+2y$ $\quad$ w=x+y^2 $\quad \frac{\partial w}{\partial x}=1$ $\quad \frac{\partial w}{\partial y}=2y$

Q(x,y)= $x+4xy+5y^2$ $\quad \frac{\partial Q}{\partial x}=1+4y$

$$\int\frac{d\mu}{\mu}=\int\frac{1+4y-2-2y}{(3x+2y+y^2)2y-(x+4xy+5y^2)}dw$$

$$\int\frac{d\mu}{\mu}=\int\frac{2y-1}{2xy-x+2y^3-y^2}dw$$

$$\int\frac{d\mu}{\mu}=\int\frac{2y-1}{x(2y-1)+y^2(2y-1)}dw$$

$$\int\frac{d\mu}{\mu}=\int\frac{2y-1}{(2y-1)(x+y^2)}dw$$

$$\int\frac{d\mu}{\mu}=\int\frac{1}{(x+y^2)}dw$$ w=x+y^2

ln μ =ln(x+y^2) +ln c , pa je ln μ =ln(x+y^2)c to jest za c=1 μ = x+y^2

Dakle ,traženi integracioni faktor je μ = x+y^2 kojim množimo celu jednačinu

$(x+y^2)(3x+2y+y^2)dx+(x+y^2)(x+4xy+5y^2)dy=0$

$(3x^2+2xy+xy^2+3xy^2+2y^3+y^4)dx+(x^2+4x^2y+5xy^2+xy^2+4xy^3+5y^4)dy=0$

$(3x^2+2xy+4xy^2+2y^3+y^4)dx+(x^2+4x^2y+6xy^2+4xy^3+5y^4)dy=0$

$\frac{\partial P}{\partial y}=2x+8xy+6y^2+4y^3$ $\qquad\qquad$ $\frac{\partial Q}{\partial x}=2x+8xy+6y^2+4y^3$

C= $\int P(x,y)dx+\int[Q-\frac{\partial}{\partial y}\int P(x,y)dx]dy$

$\int P(x,y)dx=\int\ (3x^2+2xy+4xy^2+2y^3+y^4)dx=\ 3\frac{x^3}{3}+2y\frac{x^2}{2}+4y^2\frac{x^2}{2}+2y^3x+y^4x$

$\frac{\partial}{\partial y}\ (3\frac{x^3}{3}+2y\frac{x^2}{2}+4y^2\frac{x^2}{2}+2y^3x+y^4x)$ =$x^2+4x^2y+6xy^2+4xy^3$

C= $x^3+x^2y+2y^2x^2+2y^3x+y^4x+\int\ [(x^2+4x^2y+6xy^2+4xy^3+5y^4)$ -($x^2+4x^2y+6xy^2+4xy^3$)]dy

C=$x^3+x^2y+2y^2x^2+2y^3x+y^4x+\int 5y^4dy$

C=$x^3+x^2y+2y^2x^2+2y^3x+y^4x+y^5$ ovo je opšte rešenje

Integralna kriva koja prolazi kroz tačku M(-2,1) je :

C= -8 + 4 + 4 – 4 – 2 + 1= - 5 pa je $\quad x^3+x^2y+2y^2x^2+2y^3x+y^4x+y^5$ = - 5

12. Reši diferencijalnu jednačinu: $y`=\frac{3y^3-2xy^2}{7-3xy^2}$ **ako se zna da je integracioni faktor u funkciji od y**

Rešenje:

$y`=\frac{3y^3-2xy^2}{7-3xy^2}$

$\frac{dy}{dx}=\frac{3y^3-2xy^2}{7-3xy^2}$

$(7-3xy^2)dy=(3y^3-2xy^2)dx$

$(7-3xy^2)dy-(3y^3-2xy^2)dx=0$

$(2xy^2-3y^3)dx+(7-3xy^2)dy=0$

$\frac{\partial P}{\partial y}=4xy-9y^2$ $\qquad$ $\frac{\partial Q}{\partial x}=-3y^2$

Kako je integracioni faktor u funkciji od y to ćemo koristiti formulu:

μ (x,y)= μ (y)

$$\int \frac{d\mu}{\mu} = \int \frac{1}{P}(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dy$$

$$\int \frac{d\mu}{\mu} = \int \frac{1}{y^2(2x-3y)}(-3y^2 - 4xy + 9y^2)dy$$

$$\int \frac{d\mu}{\mu} = \int \frac{1}{y^2(2x-3y)}(-4xy + 6y^2)dy$$

$$\int \frac{d\mu}{\mu} = \int \frac{1}{y^2(2x-3y)}2y(3y-2x)dy$$

$$\int \frac{d\mu}{\mu} = \int \frac{-2}{y}dy$$

$\ln|\mu| = -2\ln|y| + \ln c \quad \ln|\mu| = \ln|y|^{-2} + \ln c$ za c=1 je

$\mu = \frac{1}{y^2}$ traženi integracioni faktor

$$\frac{1}{y^2}(2xy^2 - 3y^3)dx + \frac{1}{y^2}(7 - 3xy^2)dy = 0$$

$$(2x - 3y)dx + (\frac{7}{y^2} - 3x)dy = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -3 \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = -3$$

$$\int P(x,y)dx = \int (2x - 3y)dx = x^2 - 3yx$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(x^2 - 3yx) = -3x$$

$$C = \int P(x,y)dx + \int [Q - \frac{\partial}{\partial y}\int P(x,y)dx]dy$$

$$C = x^2 - 3xy + \int (\frac{7}{y^2} - 3x + 3x)dy$$

$$C = x^2 - 3xy + \int (\frac{7}{y^2})dy$$

$\boxed{C = x^2 - 3xy - \frac{7}{y} \quad \text{ovo je opšte rešenje}}$

13. Rešiti diferencijalnu jednačinu: y\` = ln(xy\` - y)

Rešenje: Uvodimo smenu y\`= p $\frac{dy}{dx} = p \Rightarrow dy = pdx$

y\` = ln(xy\` - y)

p = ln(xp – y) odavde izrazimo y

$e^p = xp - y$
$y = px - e^p$ diferenciramo

$$dy = \frac{\partial(xp - e^p)}{\partial x}dx + \frac{\partial(xp - e^p)}{\partial p}dp$$

$$dy = pdx + (x - e^p)dp$$

$$pdx = pdx + (x - e^p)dp$$

$$(x - e^p)dp = 0$$

$$\int (x - e^p)dp = 0$$

$$xp - e^p + c = o$$

$$x = \frac{e^p - c}{p}$$

$$y = xp - e^p$$

$$y = \frac{e^p - c}{p}p - e^p$$

$$y = -c$$

$$\left.\begin{array}{l} x = \dfrac{e^p - c}{p} \\ y = -c \end{array}\right\}$$ **opšte rešenje u parametarskom obliku**

14. Rešiti diferencijalnu jednačinu: $y` + y = xy`^2$

Rešenje:

I ovde ćemo kao i u prethodnom primeru upotrebiti metod parametra y`= p

$$\frac{dy}{dx} = p \Rightarrow dy = pdx$$

$$y` + y = xy`^2$$
$$p + y = xp^2$$
$$y = xp^2 - p$$

diferenciramo

$$dy = p^2 dx + (2px - 1)dp$$

$$pdx = p^2 dx + (2px - 1)dp$$

$(p - p^2)dx = (2px - 1)dp$ sve podelimo sa dp

$$(p - p^2)\frac{dx}{dp} = (2px - 1)$$

$$(p - p^2)x` = (2px - 1)$$

$(p - p^2)x` - 2px = -1$ pomnožimo sa -1

$p(p-1)x` + 2px = 1$ sve podelimo sa p(p – 1)

$$x` + \frac{2p}{p(p-1)}x = \frac{1}{p(p-1)}$$

$x` + \frac{2}{(p-1)}x = \frac{1}{p(p-1)}$ ovo je linearna d.j. po x, x=x(p)

Rešavamo je upotrebom poznate formule:

x(p)= $e^{-\int p(p)dp}(c + \int q(p)e^{\int p(x)dp}dp)$ i dobijemo:

x(p) = $\frac{1}{(p-1)^2}[c + p - \ln|p|\,]$ ovo rešenje zamenimo u y = xp^2- p

y(p)= $\frac{1}{(p-1)^2}[c + p - \ln|p|$ p^2- p

I ovo je opšte rešenje u parametarskom obliku.

15. Pokazati da diferencijalna jednačina $(x^2+x)y`+y^2+(1-2x)y-2x=0$ ima partikularno rešenje $y_1=a$ gde je a konstanta koju treba odrediti. Naći njeno opšte rešenje.

Rešenje:

$(x^2+x)y`+y^2+(1-2x)y-2x=0$ ima jedno rešenje $y_1=a \Rightarrow y_1`=0$ zamenimo u d.j.

$0+a^2+(1-2x)a-2x=0$

$a^2+a-2ax-2x=0$

$x(-2a-2)+(a^2+a)=0$

Odavde mora biti : *-2a-2 = 0* *i* *a^2+ a = 0*

-2a = 2 *a(a + 1)= 0*

a= - 1 *a=0 ili a = - 1*

Dakle,zaključujemo da je *a*= - 1 pa je jedno rešenje $y_1=-1$

Ovo je Rikatijeva diferencijalna jednačina , oblika je y` = P(x) y^2 + Q(x)y + R(x)

Ako je poznato jedno partikularno rešenje $y_1(x)$, onda uzimamo smenu $y(x) = y_1(x)+\dfrac{1}{z(x)}$ i posle sredjivanja dobijamo linearnu d.j.

$y(x) = y_1(x)+\dfrac{1}{z(x)}$ pa je $y=-1+\dfrac{1}{z} \Rightarrow y`=-\dfrac{z`}{z^2}$

$(x^2+x)y`+y^2+(1-2x)y-2x=0$

$(x^2+x)(-\dfrac{z`}{z^2})+(\dfrac{1}{z}-1)^2+(1-2x)(\dfrac{1}{z}-1)-2x=0$ sredimo...

$z`+\dfrac{2x+1}{x^2+x}z=\dfrac{1}{x^2+x}$ ovo je linearna d.j. po z

$z(x) = e^{-\int p(x)dx}(c+\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx)$

$\int p(x)dx=\int\dfrac{2x+1}{x^2+x}dx=\begin{vmatrix} x^2+x=t \\ (2x+1)dx=dt\end{vmatrix}=\int\dfrac{dt}{t}=\ln|t|=\ln|x^2+x|$

$\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx=\int\dfrac{1}{x^2+x}e^{\ln|x^2+x|}dx=$x pa je

$z(x)=\dfrac{c+x}{x^2+x}$ vratimo smenu:

$\dfrac{1}{y+1}=\dfrac{c+x}{x^2+x}$ a odavde je $\boxed{y=\dfrac{x^2-c}{x+c}\ \textbf{opšte rešenje}}$

16. Data je diferencijalna jednačina $xy` = y^2 - (2x+1)y + x^2 + 2x$
Odrediti realne brojeve a i b tako da je y = ax+ b partikularno rešenje date jednačine a zatim naći njeno opšte rešenje.

Rešenje:

$y = ax + b \Rightarrow y` = a$ zamenimo u datu d.j.
$xy` = y^2 - (2x+1)y + x^2 + 2x$

$xa = (ax+b)^2 - (2x+1)(ax+b) + x^2 + 2x$

$0 = a^2x^2 + 2abx + b^2 - 2ax^2 - 2bx - ax - b + x^2 + 2x - ax$

"spakujemo" uz x^2, pa uz x, pa slobodne članove

$x^2(a^2 - 2a + 1) + x(2ab - 2b - 2a + 2) + b^2 - b = 0$ odavde mora biti:

$a^2 - 2a + 1 = 0$ i $2ab - 2b - 2a + 2 = 0$ i $b^2 - b = 0$

$(a-1)^2 = 0$ $(2b-2)(a-1) = 0$ $b(b-1) = 0$

a = 1 a= 1 ili b= 1 b= 0 ili b= 1

Na ovaj način smo dobili dva moguća partikularna rešenja: y = x i y = x+1

Mi ćemo naravno odabrati lakše, odnosno y = x za drugi deo zadatka.

$xy` = y^2 - (2x+1)y + x^2 + 2x$ ovo je Rikatijeva diferencijalna jednačina, smena je:

$y(x) = y_1(x) + \frac{1}{z(x)}$ pa je $y = x + \frac{1}{z} \Rightarrow y` = 1 - \frac{z`}{z^2}$ zamenimo u d.j.

$xy` = y^2 - (2x+1)y + x^2 + 2x$

$x(1 - \frac{z`}{z^2}) = (x + \frac{1}{z})^2 - (2x+1)(x + \frac{1}{z}) + x^2 + 2x$ sredimo....

$z` - \frac{1}{x}z = -\frac{1}{x}$ ovo je linearna po z

$z(x) = e^{-\int p(x)dx}(c + \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx)$ sredimo….

z(x) = xc+1 vratimo smenu $y = x + \frac{1}{z} \Rightarrow \frac{1}{z} = y - x \Rightarrow z = \frac{1}{y-x}$

$$\frac{1}{y-x} = xc+1$$

$$y - x = \frac{1}{xc+1}$$

$$\boxed{y = x + \frac{1}{xc+1} \quad \text{je opšte rešenje}}$$

16. Rešiti diferencijalnu jednačinu: $x^2 y` = x^2 y^2 + xy + 1$

Rešenje:

$x^2 y` = x^2 y^2 + xy + 1$ sve podelimo sa x^2

$y` = y^2 + \frac{1}{x}y + \frac{1}{x^2}$ ovo je Rikatijeva diferencijalna jednačina $y` = P(x)\,y^2 + Q(x)y + R(x)$

Uvodimo smenu z=yx gde je z=z(x) (pogledaj teorijske napomene...)

$$z = yx \Rightarrow z` = y`x + y \Rightarrow y` = \frac{z`-y}{x}$$

$$y` = y^2 + \frac{1}{x}y + \frac{1}{x^2}$$

$\frac{z`-y}{x}` = (\frac{z}{x})^2 + \frac{1}{x}\frac{z}{x} + \frac{1}{x^2}$ sve pomnozimo sa x^2

$$x(z`-y) = z^2 + z + 1$$

$xz`-xy = z^2 + z + 1$ zamenimo da je yx = z

$$xz`-z = z^2 + z + 1$$

$xz` = z^2 + 2z + 1$ ov je d.j koja razdvaja promenljive $z` = \frac{dz}{dx}$

$x\frac{dz}{dx} = z^2 + 2z + 1$ pa je $\frac{dz}{(z+1)^2} = \frac{dx}{x}$ integralimo...

$-\frac{1}{z+1} = \ln|x| + c$ vratimo smenu z = xy i dobijamo opšte rešenje: $\boxed{-\frac{1}{yx+1} = \ln|x| + c}$