NEKE DIFERENCIJALNE JEDNAČINE PRVOG REDA

DIFERENCIJALNA JEDNAČINA KOJA RAZDVAJA PROMENLJIVE

y` = f(x) g(y) $\Leftrightarrow \dfrac{dy}{dx} = f(x)g(y) \Leftrightarrow \dfrac{dy}{g(y)} = f(x)dx \Leftrightarrow \int \dfrac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + c$ opšti integral

Ako postoji b tako da je g(b)=0 onda je y=b rešenje

HOMOGENA DIFERENCIJALNA JEDNAČINA

Oblika je y`=f $(\dfrac{y}{x})$ .Rešava se uvodjenjem smene $\dfrac{y}{x} = z$ odakle je y`= z+xz` . Posle smene svodi se na d.j. koja razdvaja promenljive.

Za x=0 ($y \neq 0$) ako postoji z_k iz R tako da je $f(z_k) - z_k = 0$ onda $y= z_k x$ (x>0) i $y= z_k x$ (x<0)

(0,0) je singularna tačka i izuzimamo je iz oblasti definisanosti

DIFERENCIJALNA JEDNAČINA OBLIKA y`= f $(\dfrac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1})$

Rešava se uvodjenjem smena $x = u + \alpha$ i $y = v + \beta$ gde je dx=du i dy= dv i v= v(u) , tražimo konstante α i β

Zamenom u jednačini dobijamo $\dfrac{dv}{du} = f(\dfrac{au+bv+a\alpha+b\beta+c}{a_1u+b_1v+a_1\alpha+b_1\beta+c_1})$

Odavde mora biti $a\alpha + b\beta + c = 0$ i

$a_1\alpha + b_1\beta + c_1 = 0$

$\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = 0$ onda $a= a_1k$ i $b= b_1k$ i ako je $\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \neq 0$ onda $\dfrac{dv}{du} = g(\dfrac{v}{u})$ je homogena d.j.

LINEARNA DIFERENCIJALNA JEDNAČINA

Oblika je **y`+ p(x) y = q(x)** i rešava se preko formule

$$y = e^{-\int p(x)dx}(c + \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx)$$

BERNULIJEVA DIFERENCIJALNA JEDNAČINA

Oblika je **y`+ p(x) y = q(x ) $y^n$** rešava se smenom $z = y^{1-n}$ pa je $z` = (1-n)\, y^{-n}y`$

Celu jednačinu podelimo sa y^n i svedemo je na linearnu d. j.

LAGRANŽOVA DIFERENCIJALNA JEDNAČINA

Oblika je **y = xA(y`)+B(y`)**

Uvodimo smenu y` = p , $\frac{dy}{dx} = p$, pa je dy = pdx

y=xA(p)+B(p)   diferenciramo i svedemo je na linearnu d.j.

$\frac{dx}{dp}$ - $\frac{A`(p)}{p - A(p)} x = \frac{B`(p)}{p - A(p)}$

KLEROOVA DIFERENCIJALNA JEDNAČINA

Oblika je **y = xy`+A(y`)**   Uvodimo smenu y` = p , $\frac{dy}{dx} = p$, pa je dy = pdx

Posle diferenciranja dobijamo : x+A`(p)=0 ili dp=0

RIKATIJEVA DIFERENCIJALNA JEDNAČINA

Oblika je **y` = P(x) y^2 + Q(x)y + R(x)**

1) Ako su P,Q,R konstante onda je ovo d.j. koja razdvaja promenljive
2) Ako je y`=Ay^2+$\frac{B}{x} y + \frac{C}{x^2}$ uvodimo smenu z=yx gde je z=z(x)
3) Ako je poznato jedno partikularno rešenje y_1(x) , onda uzimamo smenu y(x) = y_1(x)+$\frac{1}{z(x)}$ i posle sredjivanja dobijamo linearnu d.j.

METOD PARAMETRA

Neka nam je data funkcija u obliku F(x,y,y`)=0

1) Ako je y = f(x, y`) onda uzimamo smenu y` = p , pa je $\frac{dy}{dx} = p$, pa je dy = pdx

dy = $\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dp$ zamenimo dy i sredimo....

2) Ako je x = g(y,y`) smena je isto y` = p , dy= pdx

dx = $\frac{\partial g}{\partial y} dy + \frac{\partial g}{\partial p} dp$ zamenimo dx = $\frac{dy}{p}$ i rešavamo ...

DIFERENCIJALNA JEDNAČINA SA TOTALNIM DIFERENCIJALOM

Oblika je P(x,y) + Q(x,y) = 0

Teorema: Da bi ova jednačina bila sa totalnim diferencijalom potrebno je i dovoljno da je $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$

Rešavamo je preko formule : C= $\int P(x,y)dx+\int[Q-\frac{\partial}{\partial y}\int P(x,y)dx]dy$

INTEGRACIONI FAKTOR

Ako jednačina P(x,y) + Q(x,y) = 0 nije jednačina sa totalnim diferencijalom tražimo funkciju $\mu=\mu(x,y)$

tako da μ (x,y) P(x,y)+ μ (x,y) Q(x,y)=0 postane jednačina sa tot.dif.

1) Ako je μ (x,y)= $\mu(x)$

$$\int\frac{d\mu}{\mu}=\int\frac{1}{Q}(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x})dx$$

2) Ako je μ (x,y)= μ (y)

$$\int\frac{d\mu}{\mu}=\int\frac{1}{P}(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dy$$

3) Ako je μ (x,y)= μ (w(x,y))

$$\int\frac{d\mu}{\mu}=\int\frac{\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}}{P\frac{\partial w}{\partial y}-Q\frac{\partial w}{\partial x}}dw$$

Kad ne znamo oblik integracionog faktora probamo sa w(x,y)= $\lambda\ln|x|+\nu\ln|y|$