VIŠESTRUKI INTEGRALI - ZADACI (VI DEO)

Trostruki integrali

Ako je funkcija *f (x,y,z)* neprekidna u oblasti V koja je određena sa:

$$V: \begin{cases} x_1 \le x \le x_2 \\ y_1(x) \le y \le y_2(x) \\ z_1(x,y) \le z \le z_2(x,y) \end{cases} \quad \text{onda je} \quad \iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz$$

Neki profesori vole drugačiji zapis:

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \int_{x_1}^{x_2} \left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \left(\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz \right) dy \right) dx$$

Vi naravno radite kako vaš profesor zahteva.

U suštini, oba zapisa znače da prvo rešavamo integral "po z" , onda "po y", i na kraju "po x".

Ovakav poredak u integraciji nije obavezan. Zavisno od konkretne situacije možemo i promeniti poredak

integracije...

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \int_{x_1}^{x_2} \left(\int_{z_1(x)}^{z_2(x)} \left(\int_{y_1(x,z)}^{y_2(x,z)} f(x,y,z)dy \right) dz \right) dx$$

Ovo bi značilo da prvo radimo "po y" , zatim "po z" i na kraju "po x". I tako dalje...

Primer 1.

Izračunati trojni integral: $\int_0^1 dx \int_0^2 dy \int_0^3 dz$.

Rešenje:

Ovde su nam već date granice i poredak integracije, samo da rešavamo.

Dakle, prvo rešavamo $\int_0^1 dx \int_0^2 dy \boxed{\int_0^3 dz}$

$$\int_0^1 dx \int_0^2 dy \int_0^3 dz = \int_0^1 dx \int_0^2 z\Big|_0^3 dy = \int_0^1 dx \int_0^2 3dy = 3\int_0^1 dx \underbrace{\boxed{\int_0^2 dy}}_{\text{sad ovo}} = 3\int_0^1 y\Big|_0^2 dx = 3\int_0^1 2dx = 6\int_0^1 dx = 6 \cdot 1 = 6$$

u onom drugom zapisu bi bilo:

$$\int_0^1 dx \int_0^2 dy \int_0^3 dz = \int_0^1 \left(\int_0^2 \left(\int_0^3 dz \right) dy \right) dx = \int_0^1 \left(\int_0^2 3dy \right) dx = \int_0^1 6dx = 6$$

Primer 2.

Izračunati trojni integral: $\iiint_V (x+y+z)dxdydz$ ako je oblast V zadata sa $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$, $0 \le z \le 1$

Rešenje:

Prvo radimo "po z" i u toj situaciji x i y posmatramo kao konstante.

$$\iiint_V (x+y+z)dxdydz =$$

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 \left(\int_0^1 (x+y+z)dz \right) dy \right) dx = \int_0^1 \left(\int_0^1 \left(xz + yz + \frac{z^2}{2} \right) \Bigg|_0^1 dy \right) dx = \int_0^1 \left(\int_0^1 \left(x + y + \frac{1}{2} \right) dy \right) dx$$

Sad rešavamo "po y" a x tretiramo kao konstantu.

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 \left(x + y + \frac{1}{2} \right) dy \right) dx = \int_0^1 \left(xy + \frac{y^2}{2} + \frac{1}{2} y \right) \Bigg|_0^1 dx = \int_0^1 (x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}) dx = \int_0^1 (x+1) dx$$

I na kraju rešimo običan integral "po x":

$$\int_0^1 (x+1)dx = \left(\frac{x^2}{2} + x \right) \Bigg|_0^1 = \frac{1}{2} + 1 = \boxed{\frac{3}{2}}$$

Primer 3.

Izračunati trojni integral: $\iiint_V y\cos(z+x)dxdydz$ ako je oblast V ograničena sa cilindrom $y = \sqrt{x}$ i ravnima

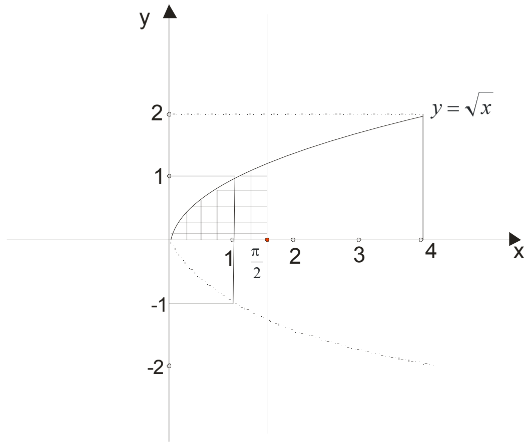
y = 0, z = 0 i $x + z = \dfrac{\pi}{2}$.

Rešenje:

E ovde nemamo date granice, pa moramo prvo njih da odredimo:

$x+z=\frac{\pi}{2} \to z=\frac{\pi}{2}-x$ pa onda $0 \le z \le \frac{\pi}{2}-x$

Da bi odredili kako se ponašaju x i y , nacrtajmo sliku u ravni z = 0



Jasno je da $0 \le y \le \sqrt{x}$, ako pogledamo sliku u ravni z=0, onda zaključujemo da $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$

Sad da se bacimo na rešavanje integrala:

$$\iiint_V y\cos(z+x)dxdydz = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{\sqrt{x}}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}-x} y\cos(z+x)dz\right)dy\right)dx$$

Rešićemo na stranu:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}-x} y\cos(z+x)dz = y\int_0^{\frac{\pi}{2}-x} \cos(z+x)dz = y\sin(z+x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}-x} = y\left(\sin(\frac{\pi}{2}-x+x)-\sin(0+x)\right)$$

$$= y\left(\sin\frac{\pi}{2}-\sin(x)\right) = y\left(1-\sin x\right)$$

Vratimo se :

$$\iiint_V y\cos(z+x)dxdydz = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{\sqrt{x}}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}-x} y\cos(z+x)dz\right)dy\right)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{\sqrt{x}} y\left(1-\sin x\right)dy\right)dx$$

Sad da rešimo:

$$\int_0^{\sqrt{x}} y\left(1-\sin x\right)dy = \left(1-\sin x\right)\int_0^{\sqrt{x}} ydy = \left(1-\sin x\right)\frac{y^2}{2}\Big|_0^{\sqrt{x}} = \left(1-\sin x\right)\frac{x}{2}$$

Opet se vratimo gore i imamo:

$$\iiint_V y\cos(z+x)dxdydz=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{\sqrt{x}}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}-x} y\cos(z+x)dz\right)dy\right)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{\sqrt{x}} y\left(1-\sin x\right)dy\right)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\sin x\right)\frac{x}{2}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(x-x\sin x\right)dx$$

Ovo je već običan integral koga rastavimo na dva , jedan je odmah tablični a drugi (x sinx) rešimo

parcijalnom integracijom i dobijamo:

$$\iiint_V y\cos(z+x)dxdydz=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(x-x\sin x\right)dx=\boxed{\frac{\pi^2}{16}+\frac{1}{2}}$$

Primer 4.

Izračunati trojni integral: $\iiint_V \sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz$ ako je oblast V zadata sa $x^2+y^2=z^2$ i $z=1$.

Rešenje:

Nadjimo presek konusa i ravni koji će nam dati granice:

$$x^2+y^2=z^2 \wedge z=1$$
$$x^2+y^2=1$$

Ovde je zgodno koristiti :

CILINDRIČNE KOORDINATE

$$\begin{cases} x=r\cos\varphi \\ y=r\sin\varphi \quad \rightarrow |J|=r \\ z=z \end{cases}$$

onda je $\iiint_V f(x,y,z)dxdydz=\iiint f(r\cos\varphi,r\sin\varphi,z)drd\varphi dz=\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}d\varphi\int_0^r rdr\int_{z_1}^{z_2}fdz$

Da vas ne zbuni , neki profesori ne uzimaju z=z, već stave : $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = h \end{cases} \rightarrow |J| = r$, ali to suštinski

ništa ne menja stvari...

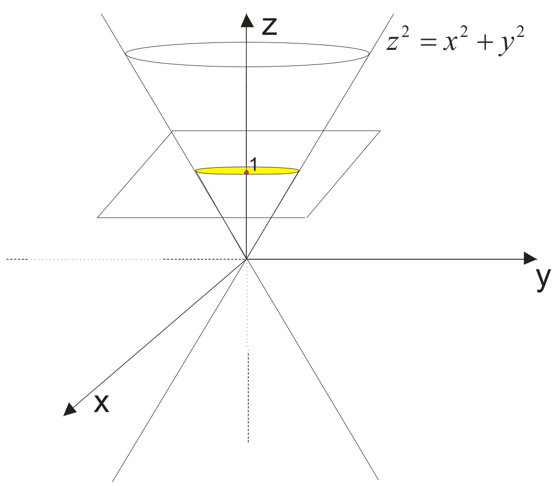
Dakle:

$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases} \rightarrow |J| = r$ pa je $\begin{array}{l} x^2 + y^2 = 1 \\ (r\cos\varphi)^2 + (r\sin\varphi)^2 = 1 \\ r^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = 1 \\ r^2 = 1 \rightarrow r = 1 \end{array}$ i $0 \le r \le 1$.

Ugao uzima vrednosti $0 \le \varphi \le 2\pi$.

Još da odredimo granice za z:

Pogledajmo sliku u prostoru:



Odozgo je ravan a odozdo konus, pa je $r \le z \le 1$ jer je $\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{r^2} = r$

$$\iiint\limits_V \sqrt{x^2 + y^2}\,dxdydz = ?$$

$$\iiint\limits_V \sqrt{x^2 + y^2}\,dxdydz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 dr \int_r^1 r \cdot r dz = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 r^2\left(\int_r^1 dz\right)dr\right)d\varphi = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 r^2(1-r)\,dr\right)d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 \left(r^2 - r^3\right)dr\right)d\varphi = 2\pi\left(\frac{r^3}{3} - \frac{r^4}{4}\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= \boxed{\frac{\pi}{6}}$$

Primer 5.

Izračunati trojni integral: $\iiint\limits_V \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right) dxdydz$ ako je oblast V zadata sa $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

Rešenje:

Ovde je zgodno koristiti:

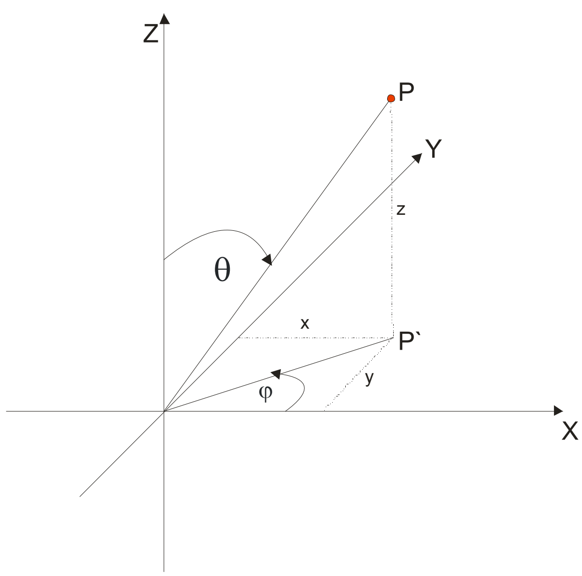
SFERNE KOORDINATE

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\sin\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

$|J| = r^2 \sin\theta$ Odavde je $x^2+y^2+z^2 = r^2$

Uglove φ i θ određujemo iz zadatka i vodimo računa da je najčešće :

$r \geq 0; 0 \leq \varphi \leq 2\pi; 0 \leq \theta \leq \pi$



Znači: φ je ugao u ravni z=0 a θ je ugao u prostoru...

Možemo koristiti(u zavisnosti od situacije) i modifikovane sferne koordinate (generalisane):

$$\begin{cases} x = ar\cos\varphi\sin\theta \\ y = br\sin\varphi\sin\theta \\ z = cr\cos\theta \end{cases}$$

a odavde je $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = r^2$ i $|J| = abcr^2 \sin\theta$

U našem zadatku ćemo koristiti ove malo modifikovane sferne koordinate, jer se radi o elipsoidu!

Dakle:

$$\begin{cases} x = ar\cos\varphi\sin\theta \\ y = br\sin\varphi\sin\theta \\ z = cr\cos\theta \end{cases} \quad \text{a odavde je } |J| = abcr^2\sin\theta$$

Zašto je baš $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=r^2$. Da dokažemo ovo:

$$\left.\begin{array}{l} x = ar\cos\varphi\sin\theta \\ y = br\sin\varphi\sin\theta \\ z = cr\cos\theta \end{array}\right\} \text{zamenimo u } \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}$$

$$\frac{(ar\cos\varphi\sin\theta)^2}{a^2}+\frac{(br\sin\varphi\sin\theta)^2}{b^2}+\frac{(cr\cos\theta)^2}{c^2}=$$

$$\frac{\cancel{a^2}r^2\cos^2\varphi\sin^2\theta}{\cancel{a^2}}+\frac{\cancel{b^2}r^2\sin^2\varphi\sin^2\theta}{\cancel{b^2}}+\frac{\cancel{c^2}r^2\cos^2\theta}{\cancel{c^2}}=$$

$$r^2\cos^2\varphi\sin^2\theta+r^2\sin^2\varphi\sin^2\theta+r^2\cos^2\theta=$$

$$r^2\sin^2\theta\left(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\right)+r^2\cos^2\theta=$$

$$r^2\sin^2\theta+r^2\cos^2\theta=r^2\left(\sin^2\theta+\cos^2\theta\right)=r^2$$

Rekli smo da je $0\le r; 0\le\varphi\le 2\pi; 0\le\theta\le\pi$ pa imamo samo korekciju: $0\le r\le 1;\quad 0\le\varphi\le 2\pi;\quad 0\le\theta\le\pi$

jer $\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\rightarrow r^2=1\rightarrow r=1$

Sad možemo rešiti integral:

$$\iiint_V\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)dxdydz = abc\int_0^\pi d\theta\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1 r^2\sin\theta r^2dr = abc\int_0^\pi\sin\theta d\theta\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1 r^4dr$$

Sad ovo nije teško izračunati : dobijamo $\iiint_V\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)dxdydz=\boxed{\frac{4\pi}{5}abc}$

__**Izračunavanje zapremine pomoću trostrukog integrala**__

Zapreminu računamo po formuli $\mathbf{V}=\iiint\limits_V dxdydz$ po oblasti V

Primer 1.

Naći zapreminu tela ograničenu površima: $z = x^2 + y^2$, $z = 2x^2 + 2y^2$, $y = x$ i $y = x^2$.

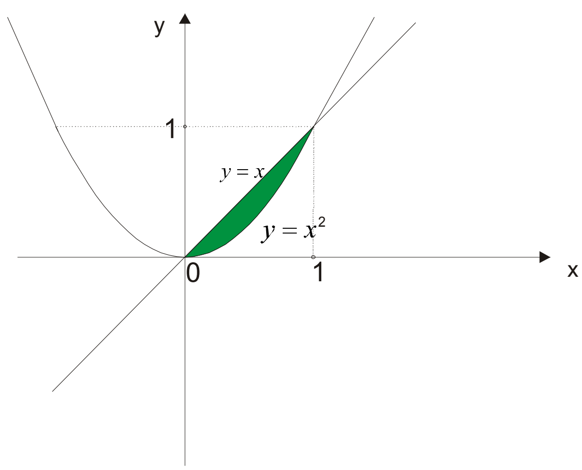
__Rešenje:__

Ovo telo je dakle ograničeno sa dva paraboloida $z = x^2 + y^2$, $z = 2x^2 + 2y^2$, sa ravni $y = x$ i sa cilindrom $y = x^2$.

Koristićemo formulu $V = \iiint\limits_V dxdydz$

Da odredimo granice:

Jasno je da je $x^2 + y^2 \le z \le 2x^2 + 2y^2$ a za x i y pogledajmo sliku:



$0 \le x \le 1$, $x^2 \le y \le x$

Da nadjemo sada zapreminu:

$$V = \iiint\limits_V dxdydz = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{x} dy \int_{x^2+y^2}^{2x^2+2y^2} dz = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{x} z \Big|_{x^2+y^2}^{2x^2+2y^2} dy = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{x} \left(x^2 + y^2\right) dy =$$

$$= \int_0^1 \left(x^2 y + \frac{y^3}{3} \right)\Bigg|_{x^2}^{x} dx = \int_0^1 \left(\frac{4x^3}{3} - x^4 - \frac{x^6}{6} \right) dx$$

$$\boxed{V = \frac{3}{35}}$$

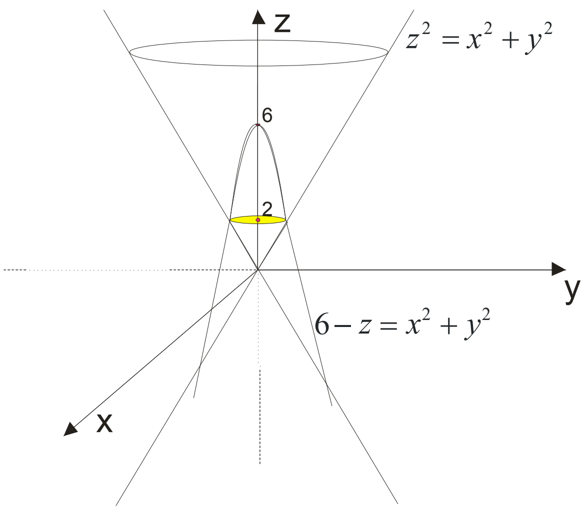
Primer 2.

Naći zapreminu tela ograničenu paraboloidom $6 - z = x^2 + y^2$ i konusom $z^2 = x^2 + y^2$

<u>*Rešenje:*</u>

Nadjimo presek:

$$z^2 = x^2 + y^2 \wedge 6 - z = x^2 + y^2$$
$$z^2 = 6 - z$$
$$z^2 + z - 6 = 0$$
$$\boxed{z_1 = 2}$$
$$z_2 = -3$$



Zgodno je uzeti cilindrične koordinate:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \quad \rightarrow |J| = r \\ z = z \end{cases}$$

Imamo:

$$x^2 + y^2 = 4 \rightarrow r^2 = 4 \rightarrow r = 2$$
$$\boxed{0 \le r \le 2}$$

Ugao ide $\boxed{0 \le \varphi \le 2\pi}$

Za paraboloid je $6 - z = x^2 + y^2 \rightarrow 6 - z = r^2 \rightarrow z = 6 - r^2$, a za konus $z^2 = x^2 + y^2 \rightarrow z^2 = r^2 \rightarrow z = r$,
zaključujemo da su granice po z : $\boxed{r \le z \le 6 - r^2}$

Sad možemo računati zapreminu:

$$V = \iiint_V dxdydz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 rdr \int_r^{4-r^2} dz$$

Ovde nema nikakvih problema, rešava se sve lako...

Rešenje je : $\boxed{V = \frac{32\pi}{3}}$

Primer 3.

Izračunati zapreminu tela koje ograničava površ $\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} + \sqrt{\frac{z}{c}} = 1$

Rešenje:

E ovo je ona zeznuta situacija kad moramo koristiti:

$$\begin{cases} x = ar\cos^{\beta}\varphi\sin^{\alpha}\theta \\ y = br\sin^{\beta}\varphi\sin^{\alpha}\theta \\ z = cr\cos^{\alpha}\theta \end{cases}$$

Jakobijan u ovoj situaciji računamo:

$$|J| = abcr^2 \cdot \alpha \cdot \beta \cdot \sin^{2\alpha-1}\theta\cos^{\alpha-1}\theta\sin^{\beta-1}\varphi\cos^{\beta-1}\varphi$$

Osnovna perioda je $r \geq 0; 0 \leq \varphi \leq 2\pi; 0 \leq \theta \leq \pi$

Uzećemo:

$$\begin{aligned} x &= ar\cos^4\varphi\sin^4\theta \\ y &= br\sin^4\varphi\sin^4\theta \\ z &= cr\cos^4\theta \end{aligned}$$

Jakobijan će biti:

$$|J| = abcr^2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot \sin^{2\cdot 4-1}\theta\cos^{4-1}\theta\sin^{4-1}\varphi\cos^{4-1}\varphi$$
$$|J| = 16abcr^2\sin^7\theta\cos^3\theta\sin^3\varphi\cos^3\varphi$$

Što su baš ove smene dobre?

$x = ar\cos^4\varphi\sin^4\theta; y = br\sin^4\varphi\sin^4\theta; z = cr\cos^4\theta$ zamenimo u $\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}+\sqrt{\frac{z}{c}}=1$

$$\sqrt{\frac{ar\cos^4\varphi\sin^4\theta}{a}}+\sqrt{\frac{br\sin^4\varphi\sin^4\theta}{b}}+\sqrt{\frac{cr\cos^4\theta}{c}}=1$$

$$\sqrt{r}\cos^2\varphi\sin^2\theta+\sqrt{r}\sin^2\varphi\sin^2\theta+\sqrt{r}\cos^2\theta=1$$

$$\sqrt{r}\sin^2\theta\left(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\right)+\sqrt{r}\cos^2\theta=1$$

$$\sqrt{r}\sin^2\theta+\sqrt{r}\cos^2\theta=1$$

$$\sqrt{r}\left(\sin^2\theta+\cos^2\theta\right)=1$$

$$\sqrt{r}=1\rightarrow r=1\rightarrow \boxed{0\le r\le 1}$$

Ovde je u suštini najveći problem naći granice za uglove...

Osnovna perioda ovde je $r \ge 0; 0 \le \varphi \le 2\pi; 0 \le \theta \le \pi$, ali nam ona samo govori u kojim granicama

moraju biti uglovi...

Ovde mora da važi da je :

$x \ge 0; y \ge 0; z \ge 0$, Znači da se uglovi moraju nalaziti u prvom kvadrantu, to jest:

$0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$ i $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$

Sada možemo preći na rešavanje integrala, to jest izračunavanje zapremine:

$$V=\iiint_V dxdydz=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1 16abcr^2\sin^7\theta\cos^3\theta\sin^3\varphi\cos^3\varphi dr=$$

premestimo konstante skroz ispred, a raspodelimo ko kojem integralu pripada...

$$V=\iiint_V dxdydz=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1 16abcr^2\sin^7\theta\cos^3\theta\sin^3\varphi\cos^3\varphi dr=$$

$$=16abc\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\varphi\cos^3\varphi d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^7\theta\cos^3\theta d\theta\int_0^1 r^2dr=$$

Znači, ovde trebamo rešiti tri posebna integrala, jer granice ne ulaze u drugi integral...

$$\int\sin^3\varphi\cos^3\varphi d\varphi=?$$

Moramo da iskoristimo znanja iz trigonometrije...

$$\cos^3\varphi = \cos^2\varphi \cdot \cos\varphi = (1-\sin^2\varphi)\cdot\cos\varphi = \cos\varphi - \sin^2\varphi\cos\varphi$$

$$\int \sin^3\varphi\cos^3\varphi d\varphi = \int \sin^3\varphi\left(\cos\varphi - \sin^2\varphi\cos\varphi\right)d\varphi =$$

$$\int (\sin^3\varphi\cos\varphi - \sin^5\varphi\cos\varphi)d\varphi =$$

Sad ovo rastavimo na dva integrala i u oba uzimamo smenu $\sin\varphi = t \to \cos\varphi d\varphi = dt$

Na sličan način rešavamo i integral po θ.

Konačno rešenje će biti: $\boxed{V = \dfrac{abc}{90}}$