VIŠESTRUKI INTEGRALI - ZADACI (I DEO)

Dvostruki integrali-odredjivanje granica integracije

Prva stvar sa kojom se susrećemo kod dvojnih integrala je odredjivanje granice integracije.

Za skoro svaki zadatak moramo crtati sliku pa je najbolje da se najpre podsetite kako izgledaju grafici osnovnih funkcija. (imate fajl na sajtu)

Imamo dva osnovna tipa područja integracija:

1)

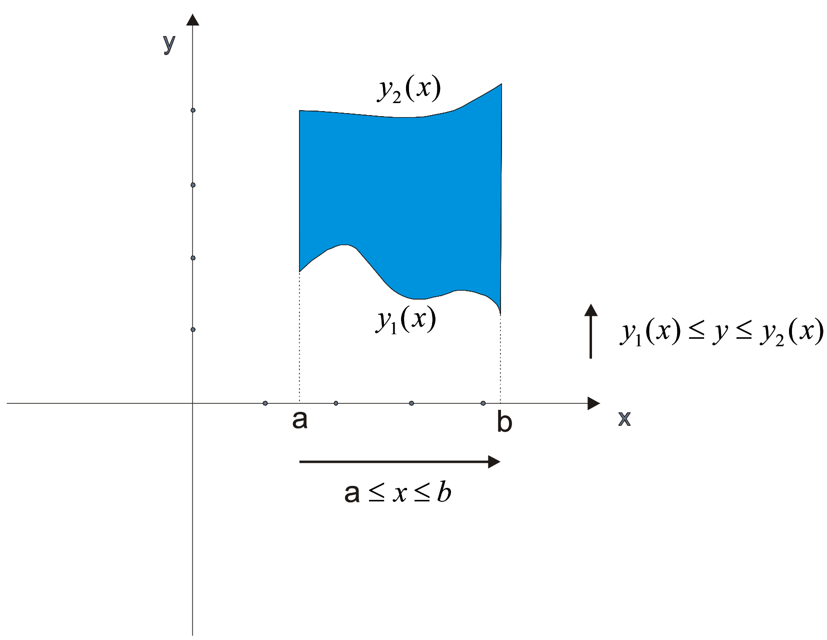
Ako je područje integracije D omedjeno sa leve i desne strane pravama x = a i x = b (recimo a < b)

a sa donje i gornje strane neprekidnim funkcijama $y_1(x)$ i $y_2(x)$ gde je $y_1(x) \le y_2(x)$, onda imamo:

$$\begin{cases} a \le x \le b \\ y_1(x) \le y \le y_2(x) \end{cases}$$

pa je: $$\iint_D z(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} z(x,y)dy$$

Pogledajmo sliku:



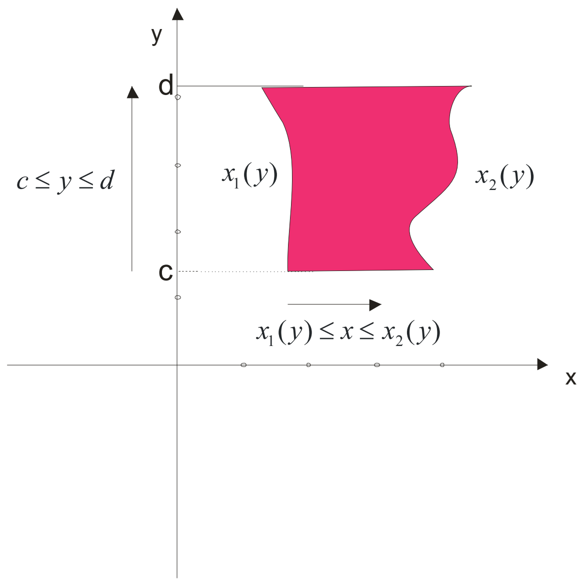
Ovo je češća situacija , kad rešavamo najpre integral " po dy " , gde ćemo x tretirati kao konstantu , a zatim rešavamo običan integral po x- su.

2)

U ovoj drugoj situaciji, područje integracije D je omedjeno odozdo i odozgo sa pravama y = c i y = d , gde je c<d,

a sa leve i desne strane su funkcije izražene preko x- sa : $x_1(y)$ i $x_2(y)$ gde je $x_1(y) \le x_2(y)$.

Pogledajmo sliku:



Znači:

Ako je oblast D određena nejednakostima:

$$\begin{cases} x_1(y) \le x \le x_2(y) \\ c \le y \le d \end{cases}$$

onda je : $$\iint_D z(x,y)dxdy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} z(x,y)dx$$

Ovde se prvo radi integral “po dx” a zatim integral po dy.

Koji ćete tip koristiti zavisi od konkretne situacije.

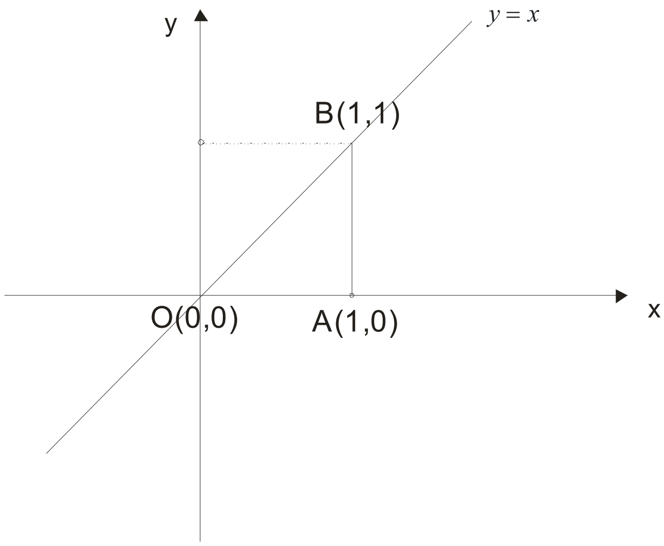
Nacrtate sliku, nadjete preseke pa krenete u rad...

Primer 1.

Odrediti granice integracije dvojnog integrala $\iint_D z(x,y)dxdy$ za oba moguća poretka integracije ako je oblast D trougao sa temenima O(0,0); A(1,0) i B (1,1)

<u>Rešenje:</u>

Najpre ćemo nacrtati sliku:

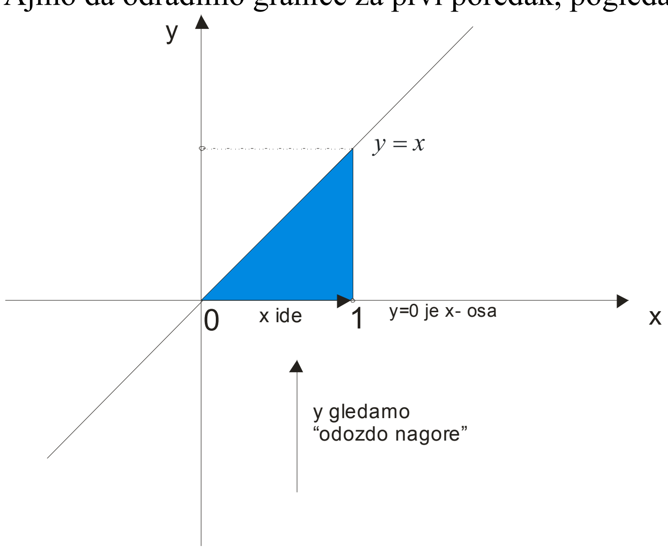


Pravu kroz tačke O i B smo našli kao jednačinu prave kroz dve date tačke (ako neznamo napamet da je odredimo) :

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$$

Pa imamo: $y-0=\frac{1-0}{1-0}(x-0)\rightarrow \boxed{y=x}$

Ajmo da odradimo granice za prvi poredak, pogledajmo sliku:



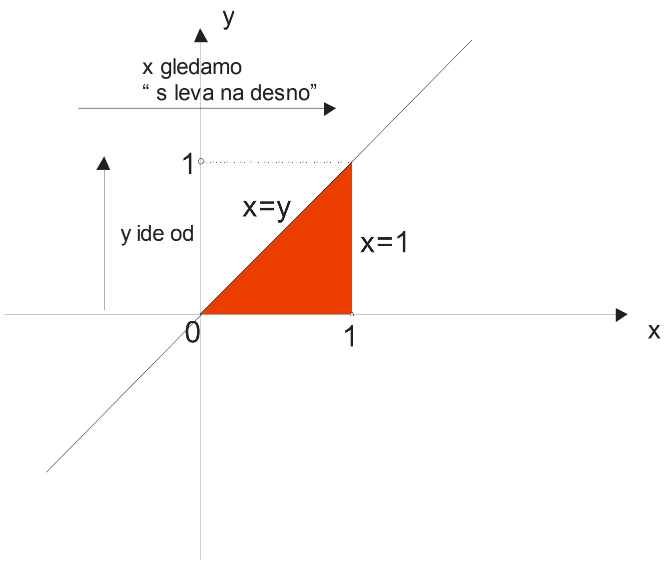
Za granice po x –su gledamo sa leva udesno. Prvo nailazimo na nulu , pa na 1. Dakle : $0 \le x \le 1$.

Kad gledamo po y , najpre nailazimo na x osu , a znamo da je to y=0. Sa gornje strane je prava y=x, pa je $0 \le y \le x$

Oblast D je: $\begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le x \end{cases}$

Ovde bi zadati integral rešavali po granicama : $\iint\limits_D z(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} z(x,y)dy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x z(x,y)dy$

Za drugi poredak integracije imamo:



Sad y ide od 0 do 1 gledajući odozdo nagore , pa je $0 \le y \le 1$.

Za x granice gledamo sa leva udesno. Najpre nailazimo na pravu x=y a zatim na pravu x=1, pa je $y \le x \le 1$

Oblast D je sada: $\begin{cases} 0 \le y \le 1 \\ y \le x \le 1 \end{cases}$

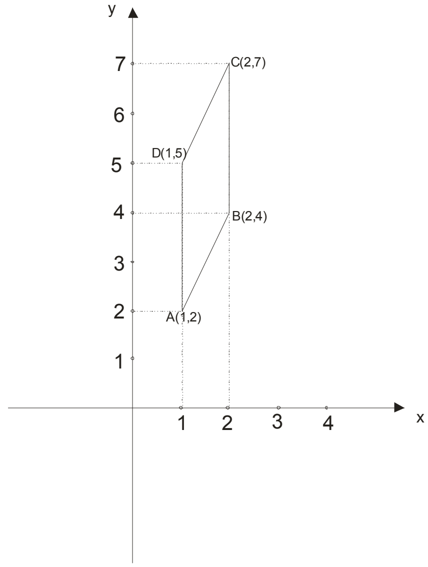
Zadani integral bi rešavali po granicama: $\iint\limits_D z(x,y)dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} z(x,y)dx = \int\limits_0^1 dy \int\limits_y^1 z(x,y)dx$

Primer 2.

Odrediti granice integracije dvojnog integrala $\iint\limits_D z(x,y)dxdy$ za oba moguća poretka integracije ako je oblast D paralelogram sa temenima A(1,2); B(2,4); C(2,7) i D(1,5)

<u>Rešenje:</u>

Crtamo sliku:

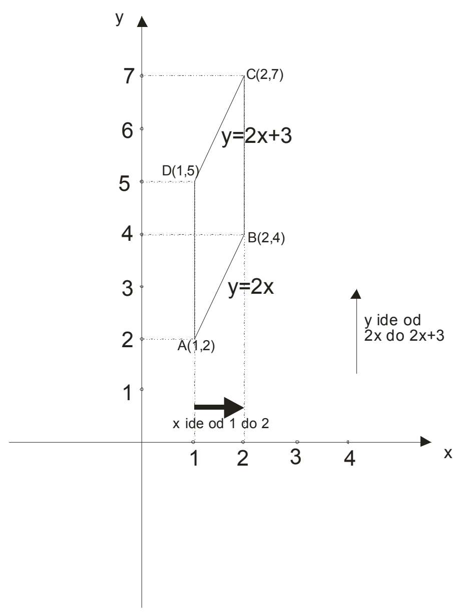


Trebaju nam jednačine pravih kroz AB i kroz CD. Koristimo kao malopre $y - y_1 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$ i dobijamo da je:

AB: $y = 2x$

CD: $y = 2x+3$

Sad možemo razmišljati o prvom poretku integracije:



Oblast D je $\begin{cases} 1 \le x \le 2 \\ 2x \le y \le 2x+3 \end{cases}$ a integral bi rešavali kao:

$$\iint_D z(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} z(x,y)dy = \int_1^2 dx \int_{2x}^{2x+3} z(x,y)dy$$

I ovo bi bio lakši način za rešavanje…

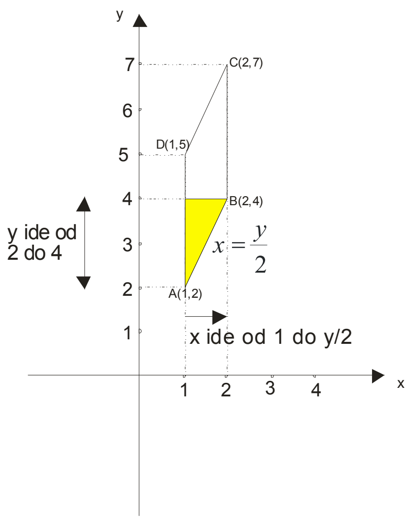
Za drugi poredak integracije bi situacija bila malo teža .

Naravno, najpre ćemo jednačine pravih AB i CD izraziti preko x-sa.

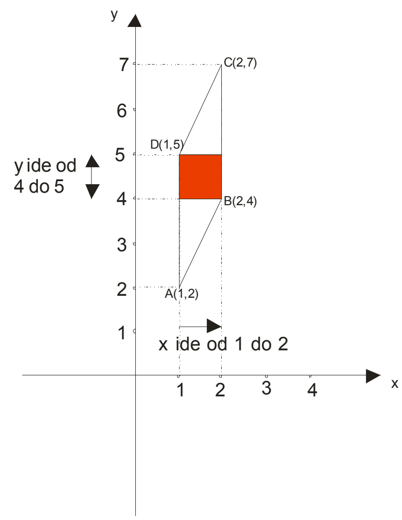
AB: $y = 2x \rightarrow x = \dfrac{y}{2}$

CD: $y = 2x+3 \rightarrow x = \dfrac{y-3}{2}$

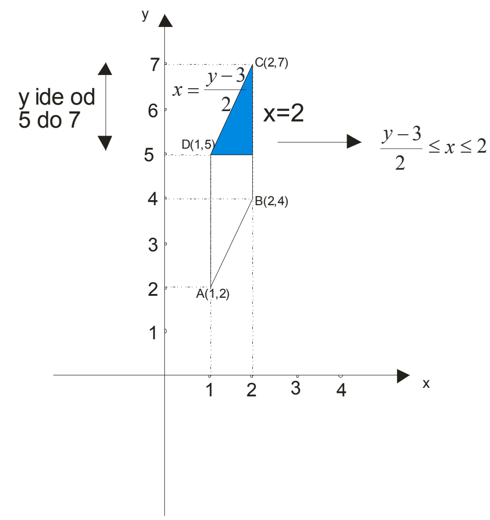
Pogledajmo sada slike:



slika 1.



slika 2.



slika 3.

Morali bi oblast integracije da podelimo na tri dela:

$$D_1 : \begin{cases} 2 \leq y \leq 4 \\ 1 \leq x \leq \dfrac{y}{2} \end{cases} \qquad D_2 : \begin{cases} 4 \leq y \leq 5 \\ 1 \leq x \leq 2 \end{cases} \qquad D_3 : \begin{cases} 5 \leq y \leq 7 \\ \dfrac{y-3}{2} \leq x \leq 2 \end{cases}$$

Zadati integral bi rešavali:

$$\iint_D z(x,y)dxdy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} z(x,y)dx = \int_2^4 dy \int_1^{\frac{y}{2}} z(x,y)dx + \int_4^5 dy \int_1^2 z(x,y)dx + \int_5^7 dy \int_{\frac{y-3}{2}}^{2} z(x,y)dx$$

Primer 3.

Odrediti granice integracije dvojnog integrala $\iint_D z(x,y)dxdy$ za oba moguća poretka integracije ako je

Oblast D ograničena linijama $y = x$ i $y = \sqrt{4x - x^2}$

<u>Rešenje:</u>

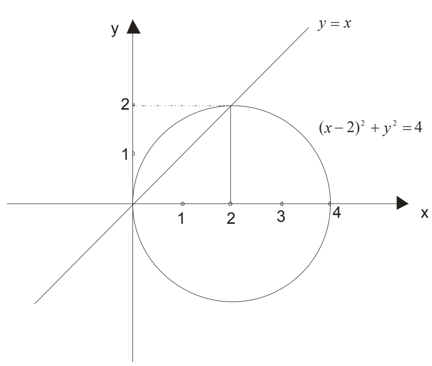
Kriva $y = \sqrt{4x - x^2}$ jeste kružnica ali je prvo moramo srediti...

$$
\begin{aligned}
&y = \sqrt{4x - x^2} .... / ()^2 \\
&y^2 = 4x - x^2 \\
&x^2 - 4x + y^2 = 0 \\
&\boxed{x^2 - 4x + 4} - 4 + y^2 = 0 \\
&(x-2)^2 + y^2 = 4
\end{aligned}
$$

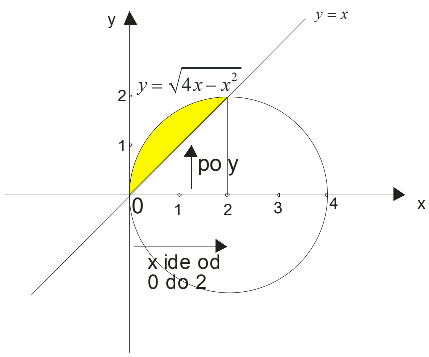
Da odmah nadjemo i preseke...Njih uvek dobijamo rešavajući sistem jednačina:

$$
\begin{aligned}
&y = \sqrt{4x - x^2} \wedge y = x \\
&x = \sqrt{4x - x^2} .... ()^2 \\
&x^2 = 4x - x^2 \\
&2x^2 - 4x = 0 \\
&2x(x-2) = 0 \rightarrow x = 0 \vee x = 2 \\
&x = 0 \rightarrow y = 0 \\
&x = 2 \rightarrow y = 2
\end{aligned}
$$

Crtamo sliku:



Prvi poredak integracije će biti:



$$D:\begin{cases} 0 \le x \le 2 \\ x \le y \le \sqrt{4x-x^2} \end{cases}$$ a integral bi rešavali: $$\iint\limits_D z(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} z(x,y)dy = \int\limits_0^2 dx \int\limits_x^{\sqrt{4x-x^2}} z(x,y)dy$$

Za drugi poredak integracije, kao i u prethodnim primerima , imamo malo više posla...

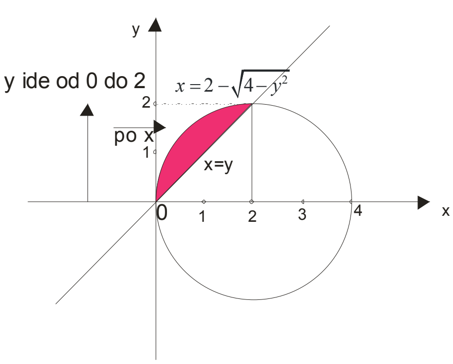
Da izrazimo najpre x iz $y=\sqrt{4x-x^2}$:

$$y=\sqrt{4x-x^2}$$
$$y^2 = 4x-x^2$$
$$x^2-4x+y^2=0$$

Ovo sad rešavamo kao kvadratnu jednačinu:

$$x^2-4x+y^2=0$$
$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{4\pm\sqrt{16-4y^2}}{2}=\frac{4\pm 2\sqrt{4-y^2}}{2}$$
$$x_{1,2}=2\pm\sqrt{4-y^2} \rightarrow nama\ treba \rightarrow \boxed{x=2-\sqrt{4-y^2}}$$

Sad slika:



$$D:\begin{cases} 0 \le y \le 2 \\ 2-\sqrt{4-y^2} \le x \le y \end{cases}$$ a integral je : $$\iint\limits_D z(x,y)dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} z(x,y)dx = \int\limits_0^2 dy \int\limits_{2-\sqrt{4-y^2}}^{y} z(x,y)dx$$

Primer 4.

Promeniti poredak integracije u integralu: $\int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} z(x,y)dx$

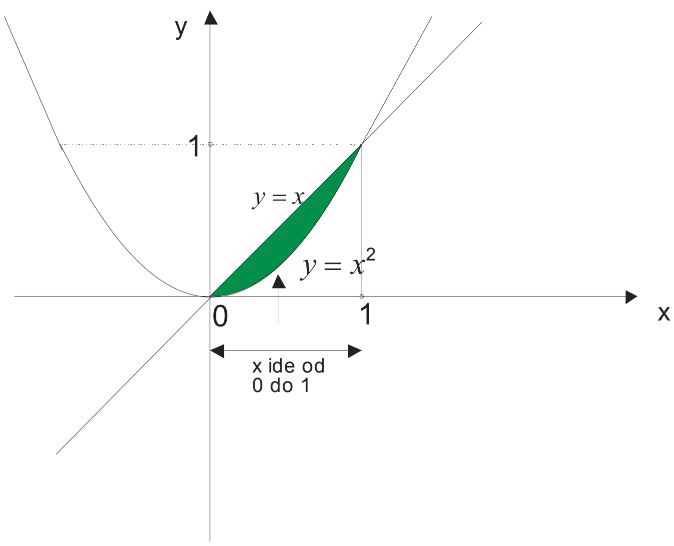
Rešenje:

Iz datog integrala $\int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} z(x,y)dx$ odmah vidimo da se radi o drugom tipu za poredak integracije i da je:

$$D: \begin{cases} 0 \le y \le 1 \\ y \le x \le \sqrt{y} \end{cases}$$

Iz $x = y \to y = x$ a iz $\sqrt{y} = x \to y = x^2$

Slika:



Odlast D je sad $D: \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ x^2 \le y \le x \end{cases}$ a integral : $\int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} z(x,y)dx = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{x} z(x,y)dy$

Primer 5.

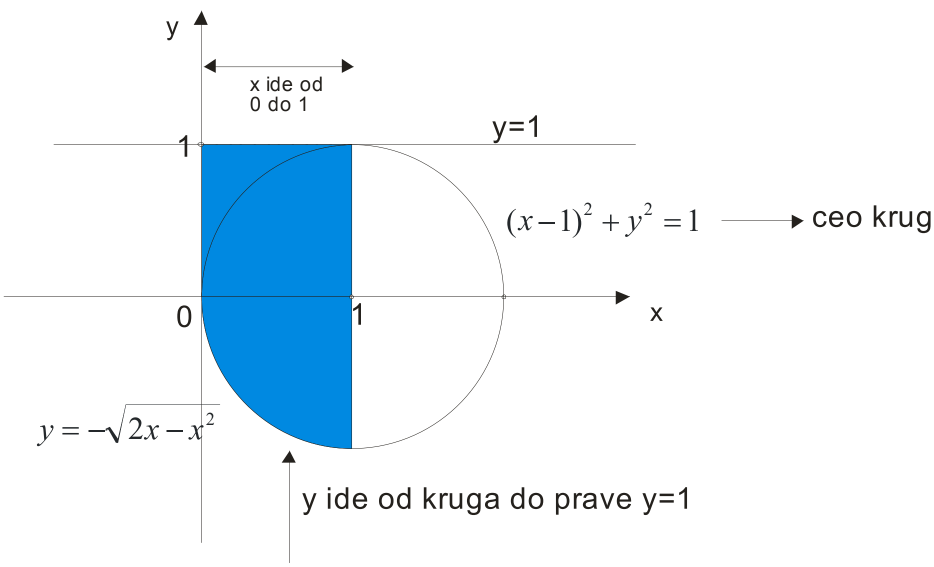
Promeniti poredak integracije u integralu: $\int_0^1 dx \int_{-\sqrt{2x-x^2}}^{1} z(x,y)dy$

Rešenje:

Sredimo kružnicu i nacrtamo sliku:

$$y=-\sqrt{2x-x^2}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots()^2$$
$$y^2=2x-x^2$$
$$x^2-2x+y^2=0$$
$$\boxed{x^2-2x+1}-1+y^2=0$$
$$(x-1)^2+y^2=1$$

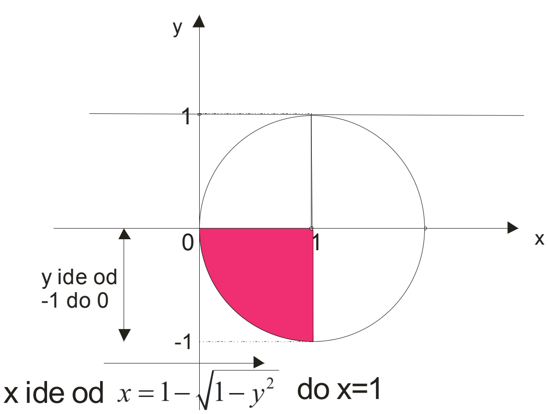
Slika:



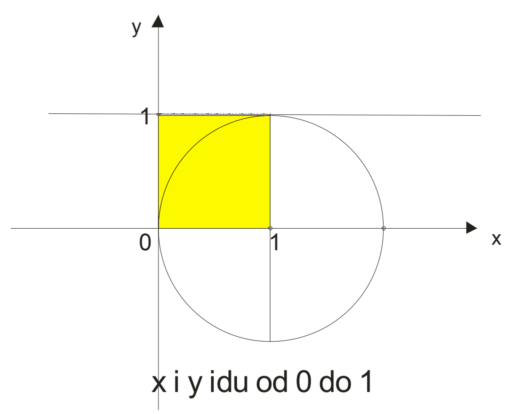
Iz kružnice sad moramo izraziti x:

$$y=-\sqrt{2x-x^2}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots()^2$$
$$y^2=2x-x^2$$
$$x^2-2x+y^2=0$$
$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{2\pm\sqrt{4-4y^2}}{2}=\frac{2\pm2\sqrt{1-y^2}}{2}=1\pm\sqrt{1-y^2}\to\boxed{x=1-\sqrt{1-y^2}}$$

Moramo oblast podeliti na dva dela:



oblast D_1



oblast D_2

Pa bi integral rešavali:

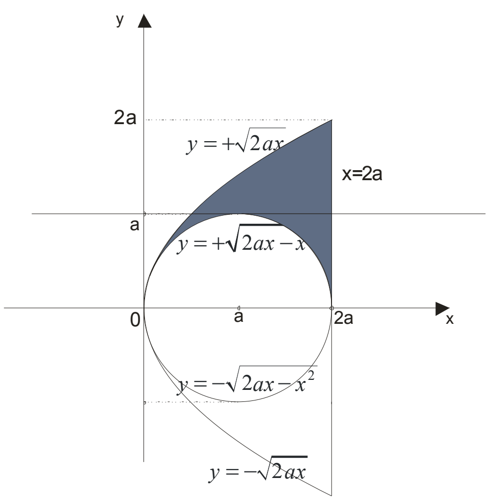
$$\int_{0}^{1} dx \int_{-\sqrt{2x-x^2}}^{1} z(x,y)dy = \int_{-1}^{0} dy \int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{1} z(x,y)dx + \int_{0}^{1} dy \int_{0}^{1} z(x,y)dx$$

Primer 6.

Promeniti poredak integracije u integralu: $\int_{0}^{2a} dx \int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} z(x,y)dy, \qquad a>0$

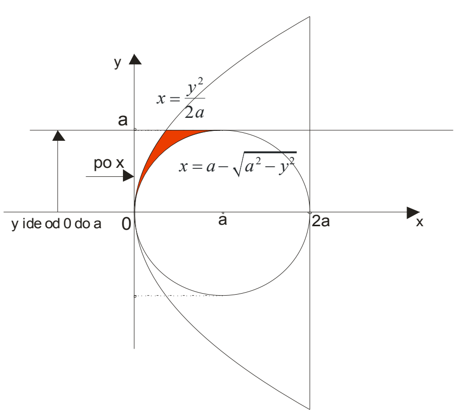
Rešenje:

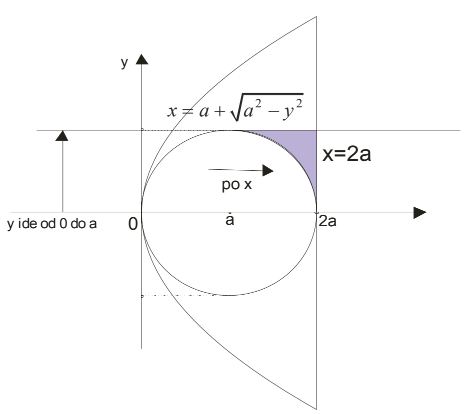
Nacrtajmo najpre sliku (naravno, prvo sredite jednačine kružnice i parabole):



Ofarbana oblast je naša oblast integracije…

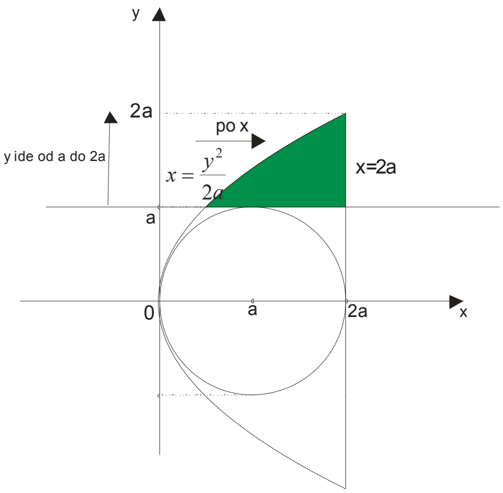
Da bi promenili poredak integracije moramo uočiti tri oblasti:





$$D_1:\begin{cases} 0\le y\le a \\ \dfrac{y^2}{2a}\le x\le a-\sqrt{a^2-y^2} \end{cases} \qquad D_2:\begin{cases} 0\le y\le a \\ a+\sqrt{a^2-y^2}\le x\le 2a \end{cases}$$

Treći deo bi bio:



$$D_3 : \begin{cases} a \le y \le 2a \\ \frac{y^2}{2a} \le x \le 2a \end{cases}$$

Sad bi samo ovo zapisali…

Primer 7.

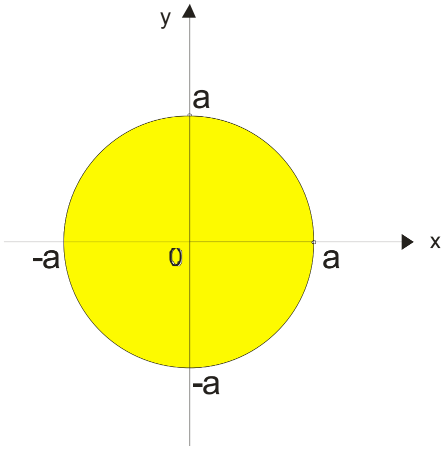
U dvojnom integralu $\iint\limits_D z(x,y)dxdy$ preći na polarne koordinate ako je oblast D krug $x^2 + y^2 \le a^2$

<u>Rešenje:</u>

Da se podsetimo najpre kako se prelazi na polarne koordinate (J je jakobijan):

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \quad \text{onda je :} \quad \iint\limits_D z(x,y)dxdy = \iint\limits_{D`} z(r\cos\varphi, r\sin\varphi)|J|drd\varphi = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int\limits_0^r z(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdr \\ |J| = r \end{cases}$$

Nacrtajmo sliku i predjimo na polarne koordinate:



$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \rightarrow |J| = r$ Ovo zamenimo u $x^2 + y^2 \le a^2$ (možete pisati i = umesto $\le$, naravno ako daje profesor vaš...)

$$x^2 + y^2 = a^2$$
$$(r\cos\varphi)^2 + (r\sin\varphi)^2 = a^2$$
$r^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = a^2$ znamo da je $\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$
$$r^2 = a^2 \rightarrow r = a$$

Dakle r ide od 0 da a.

Pošto nam ovde treba ceo krug, jasno je da $0 \le \varphi \le 2\pi$

Imamo dakle da je D\`= $\begin{cases} 0 \le r \le a \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{cases}$ pa je :

$$\iint_D z(x,y)dxdy = \iint_{D`} z(r\cos\varphi, r\sin\varphi)|J|drd\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a z(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdr$$

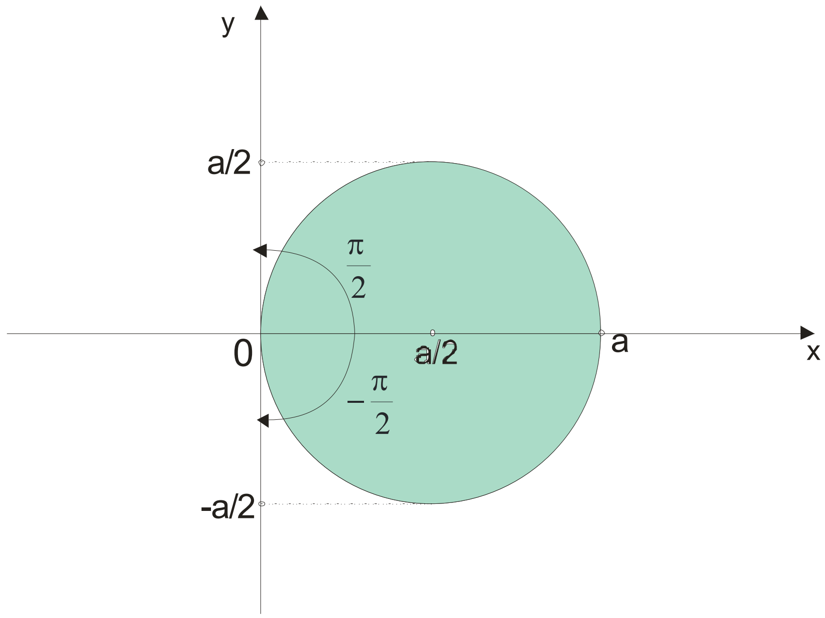
Primer 8.

U dvojnom integralu $\iint_D z(x,y)dxdy$ preći na polarne koordinate ako je oblast D krug $x^2 + y^2 \le ax$

Rešenje:

Da spakujemo kružnicu najpre, pa ćemo nacrtati sliku:

$$x^2 + y^2 = ax$$
$$x^2 - ax + y^2 = 0$$
$$x^2 - ax + \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{4} + y^2 = 0$$
$$\boxed{(x - \frac{a}{2})^2 + y^2 = \frac{a^2}{4}}$$



$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \rightarrow |J| = r$$

$$x^2 + y^2 = ax$$
$$(r\cos\varphi)^2 + (r\sin\varphi)^2 = ar\cos\varphi$$
$$r^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = ar\cos\varphi$$
$$r^2 = ar\cos\varphi \rightarrow r = a\cos\varphi$$

Dakle: $0 \le r \le a\cos\varphi$

Moramo paziti što se tiče ugla, jer sada nam ne treba ceo krug već (pogledaj sliku): $-\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$

Dakle imamo: D`= $\begin{cases} 0 \le r \le a\cos\varphi \\ -\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2} \end{cases}$ pa je:

$$\iint_D z(x,y)dxdy = \iint_{D`} z(r\cos\varphi, r\sin\varphi)|J|drd\varphi = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a\cos\varphi} z(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdr$$