KRIVOLINIJSKI INTEGRALI – ZADACI (I DEO)

Krivolinijski integrali prve vrste

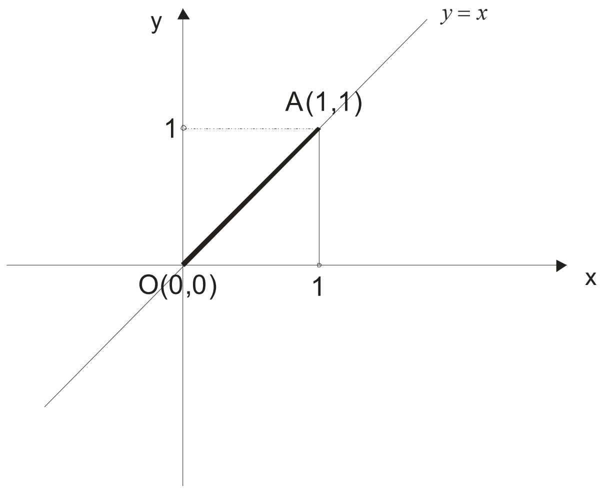
1. Izračunati krivolinijski integral $\int_c x ds$ ako je c deo prave $y = x$ između tačaka (0,0) i (1,1).

Rešenje:

Da se podsetimo:

Ako je kriva data u obliku c: y=y(x) $a \le x \le b$ tada je: $\int_c f(x,y)ds = \int_a^b f(x,y(x))\sqrt{1+(y_x^`)^2}dx$

Pogledajmo i sliku , mada ona generalno nije potrebna jer kako smo rekli , krivolinijski integral I vrste **ne zavisi** od orijentacije krive.



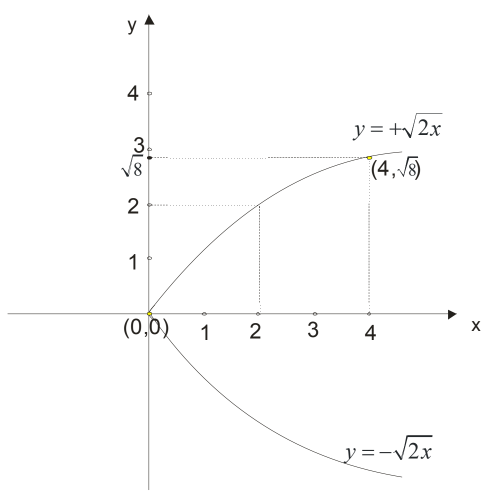
Iz $y = x \to y` = 1$ pa možemo odmah u formulu. Sa slike vidimo da su granice po x-su od 0 do 1.

$$\int_c f(x,y)ds = \int_0^1 x\cdot\sqrt{1+(1)^2}dx = \int_0^1 x\cdot\sqrt{2}dx = \sqrt{2}\int_0^1 xdx = \sqrt{2}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \sqrt{2}\cdot\frac{1}{2} = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

2. Izračunati krivolinijski integral $\int_c yds$ po luku parabole $y^2 = 2x$ od tačke (0,0) do tačke (4, $\sqrt{8}$)

Rešenje:

Da nacrtamo sliku**:**



$y^2 = 2x \rightarrow y = \pm\sqrt{2x}$ a kako nama treba gornji deo parabole, uzimamo:

$$y = +\sqrt{2x} \rightarrow y` = \frac{1}{2\sqrt{2x}} \cdot 2 \rightarrow \boxed{y` = \frac{1}{\sqrt{2x}}}$$

$$\int_c f(x,y)ds = \int_0^4 \sqrt{2x}\sqrt{1+(\frac{1}{\sqrt{2x}})^2}\,dx = \int_0^4 \sqrt{2x}\sqrt{1+(\frac{1}{2x})}dx = \int_0^4 \sqrt{2x}\sqrt{\frac{2x+1}{2x}}dx = \int_0^4 \sqrt{2x+1}dx$$

Ovaj integral ćemo rešiti ,,na stranu,, da ne menjamo granice....

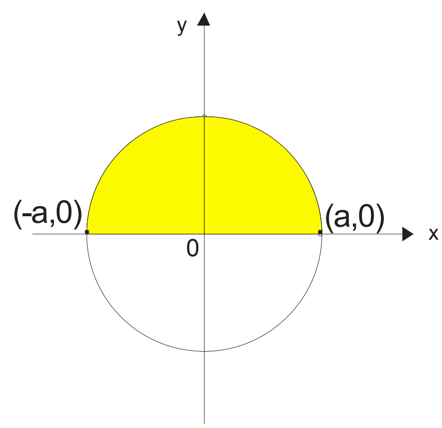
$$\int \sqrt{2x+1}dx = \begin{vmatrix} 2x+1 = t^2 \\ 2dx = 2tdt \\ dx = tdt \end{vmatrix} = \int t \cdot tdt = \int t^2 dt = \frac{t^3}{3} = \left|2x+1 = t^2 \rightarrow t = \sqrt{2x+1}\right| = \boxed{\frac{\left(\sqrt{2x+1}\right)^3}{3}}$$

Sad se vratimo u odredjeni integral:

$$\int_c f(x,y)ds = \int_0^4 \sqrt{2x+1}dx = \frac{\left(\sqrt{2x+1}\right)^3}{3}\Bigg|_0^4 = \frac{27}{3} - \frac{1}{3} = \boxed{\frac{26}{3}}$$

3. Izračunati krivolinijski integral $\int_c y^2 ds$ gde je c gornja polovina kruga $x^2 + y^2 = a^2$ između tačaka (a,0) i (-a,0).

Rešenje:



<u>I način</u>

Radićemo direktno.

$$x^2 + y^2 = a^2 \rightarrow y^2 = a^2 - x^2 \rightarrow y = \sqrt{a^2 - x^2}$$

$$y` = \frac{1}{2\sqrt{a^2 - x^2}} \cdot \left(a^2 - x^2\right)` = \frac{1}{2\sqrt{a^2 - x^2}} \cdot (-2x)$$

$$\boxed{y` = \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2}}}$$

$$\int_c y^2 ds = \int_a^b f(x, y(x))\sqrt{1+(y_x^{`})^2}\ \mathrm{dx} =$$

$$\int_{-a}^{a} (a^2 - x^2)\sqrt{1+\left(\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2}}\right)^2} = \int_{-a}^{a} (a^2 - x^2)\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2-x^2}}dx = \int_{-a}^{a} (a^2 - x^2)\sqrt{\frac{a^2 \cancel{-x^2} \cancel{+x^2}}{a^2-x^2}}dx = \int_{-a}^{a} (a^2 - x^2)\sqrt{\frac{a^2}{a^2-x^2}}dx =$$

$$= \int_{-a}^{a} (a^2 - x^2)\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = \boxed{a\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx} = \text{da nam bude lakše, možemo posmatrati} = \boxed{a \cdot 2\int_{0}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx}$$

Ovaj integral možemo rešiti na više načina (pogledajte fajlove integrali zadaci III ili IV ili V deo)

$$\int_c y^2 ds =$$

$$= a\cdot 2\cdot[\frac{1}{2}(a^2 \arcsin\frac{x}{a} + x\sqrt{a^2-x^2})]\Big|_0^a = a\cdot[(a^2 \arcsin\frac{a}{a} + a\sqrt{a^2-a^2}) - (a^2 \arcsin\frac{0}{a} + 0\cdot\sqrt{a^2-0^2})] =$$

$$= a\cdot[(a^2 \arcsin 1 + 0) - (a^2 \arcsin 0 + 0)] == a\cdot[a^2 \arcsin 1] = a^3\cdot\frac{\pi}{2} = \boxed{\frac{a^3\pi}{2}}$$

__II način__

Uzmemo da je: $x = a\ cos\ t$ i $y = a\ sin\ t$. Ovo očigledno zadovoljava da je $x^2 + y^2 = a^2$**.**

$$x = a\cos t \rightarrow x` = -a\sin t$$
$$y = a\sin t \rightarrow y` = a\cos t$$

Koristimo formulu:

$$\int_c f(x,y)ds = \int_{t_1}^{t_2} f[x(t), y(t)]\sqrt{(x_t^{`})^2 + (y_t^{`})^2}\,dt$$

Kako je data gornja polovina kruga , to je $0 \le t \le \pi$.

$$\int_c y^2 ds =$$

$$\int_0^{\pi} a^2\sin^2 t\cdot\sqrt{(-a\sin t)^2 + (a\cos t)^2}\,dt = a^2\cdot\int_0^{\pi}\sin^2 t\cdot\sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t}\,dt = a^2\cdot\int_0^{\pi}\sin^2 t\cdot a\underbrace{\sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t}}_{\text{ovo je 1}}\,dt =$$

$$= a^3\cdot\int_0^{\pi}\sin^2 t\,dt = a^3\cdot\int_0^{\pi}\frac{1-\cos 2t}{2}dt = \frac{a^3}{2}\cdot\int_0^{\pi}(1-\cos 2t)dt = \frac{a^3}{2}\cdot\pi = \boxed{\frac{a^3\pi}{2}}$$

Vi sami izaberite šta vam se više svidja, ali je nama II način mnogo lakši.

4. Izračunati krivolinijski integral $\int\limits_c \left(x^2 + y^2 + z^2\right) ds$ gde je c deo zavojnice

$$\begin{aligned} x &= a\cos t \\ y &= a\sin t \qquad \textbf{i} \qquad 0 \le t \le 2\pi \\ z &= bt \end{aligned}$$

Rešenje:

Da se podsetimo:

i) Ako je f(x,y,z) definisana i neprekidna u svakoj tački deo po deo glatke krive c date sa:

x=x(t)
y=y(t) gde je $t_1 \le t \le t_2$, i ds- diferencijal luka krive
z=z(t)

tada se krivolinijski integral prve vrste izračunava po formuli:

$$\int\limits_c f(x,y,z)ds = \int\limits_{t_1}^{t_2} f[x(t),y(t),z(t)]\sqrt{(x_t^`)^2 + (y_t^`)^2 + (z_t^`)^2}\,dt$$

Najpre ćemo naći izvode i srediti potkorenu veličinu:

$$\begin{aligned} x &= a\cos t \to x` = -a\sin t \\ y &= a\sin t \to y` = a\cos t \\ z &= bt \to z` = b \end{aligned}$$

Sad ovo ubacimo u :

$$\sqrt{(x_t^`)^2 + (y_t^`)^2 + (z_t^`)^2} = \sqrt{(-a\sin t)^2 + (a\cos t)^2 + (b)^2} = \sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + b^2} = \sqrt{a^2\left(\sin^2 t + \cos^2 t\right) + b^2} = \boxed{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

i još vidimo da je : $x^2 + y^2 + z^2 = \left(a\cos t\right)^2 + \left(a\sin t\right)^2 + \left(bt\right)^2 = a^2 + b^2t^2$

E sad se vratimo na krivolinijski integral:

$$\int\limits_c \left(x^2 + y^2 + z^2\right) ds = \int\limits_0^{2\pi} \left(a^2 + b^2t^2\right)\sqrt{a^2 + b^2}\,dt = \sqrt{a^2 + b^2}\int\limits_0^{2\pi}\left(a^2 + b^2t^2\right)dt =$$

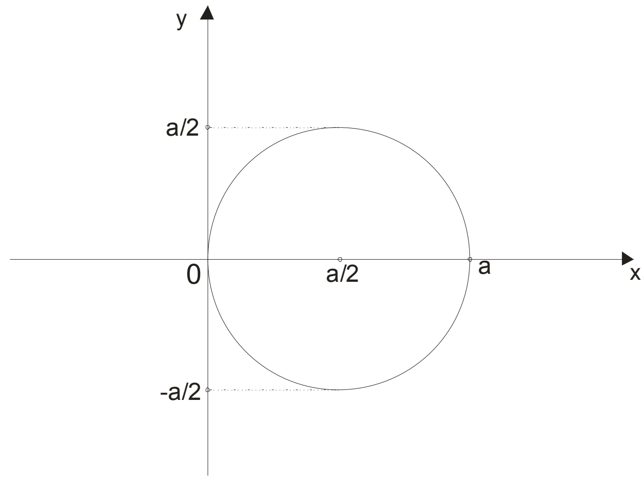
$$= \sqrt{a^2 + b^2}\left(a^2 t + b^2\frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_0^{2\pi} = \sqrt{a^2 + b^2}\left(a^2 \cdot 2\pi + b^2\frac{(2\pi)^3}{3}\right) = \boxed{\sqrt{a^2 + b^2}\left(2\pi a^2 + \frac{8\pi^3 b^2}{3}\right)}$$

5. **Izračunati krivolinijski integral** $\int_c \sqrt{x^2+y^2}\,ds$ **gde je c krug** $x^2+y^2=ax$

Rešenje:

Spakujmo najpre ovu kružnicu i nacrtajmo sliku:

$$x^2+y^2=ax$$
$$x^2-ax+y^2=0$$
$$x^2-ax+\left(\frac{a}{2}\right)^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2+y^2=0$$
$$\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2$$



Opet imamo dva načina da rešimo ovaj zadatak.

I način bi bio da predjemo u parametarski oblik, ali bi onda morali da uzimamo:

$$x=\frac{a}{2}+\frac{a}{2}\cos t$$
$$y=\frac{a}{2}\sin t$$

A zašto baš ovako?

Zato što moramo birati x i y da zadovoljavaju $\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2$ **.**

I sve bi nadalje radili po formuli: $\int_c f(x,y)ds=\int_{t_1}^{t_2} f[x(t),y(t)]\sqrt{(x_t^`)^2+(y_t^`)^2}\,dt$, gde bi bilo $0\le t\le 2\pi$ **.**

II način bi bio da uvedemo polarne koordinate:

$$x=r\cos\varphi$$
$$y=r\sin\varphi$$

A onda je:

$$(r\cos\varphi)^2+(r\sin\varphi)^2=ar\cos\varphi$$
$$r^2=ar\cos\varphi$$
$$\boxed{r=a\cos\varphi}$$

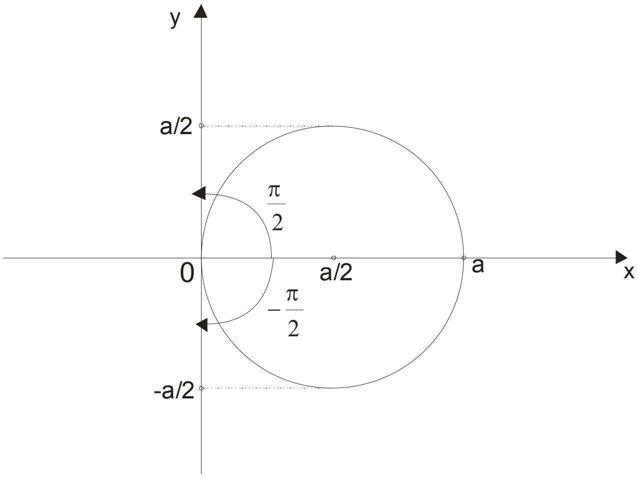
Da vas podsetimo , ovde je $ds=\sqrt{r^{`2}+r^2}\,d\varphi$ **.**

Kako je $r=a\cos\varphi \rightarrow r`=-a\sin\varphi$, **bilo bi:** $ds=\sqrt{(-a\sin\varphi)^2+(a\cos\varphi)^2}\,d\varphi=\boxed{ad\varphi}$

I još imamo da je:

$$\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(r\cos\varphi)^2+(r\sin\varphi)^2}=\boxed{r}$$

Da razmislimo o granicama za ugao (pogledajmo sliku još jednom)



$$\int_c \sqrt{x^2+y^2}\,ds = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r\cdot a d\varphi = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a\cos\varphi\cdot a d\varphi = a^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi d\varphi = a^2\left(\sin\varphi\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= a^2\left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin(-\frac{\pi}{2})\right) = a^2\left(1-(-1)\right) = \boxed{2a^2}$$

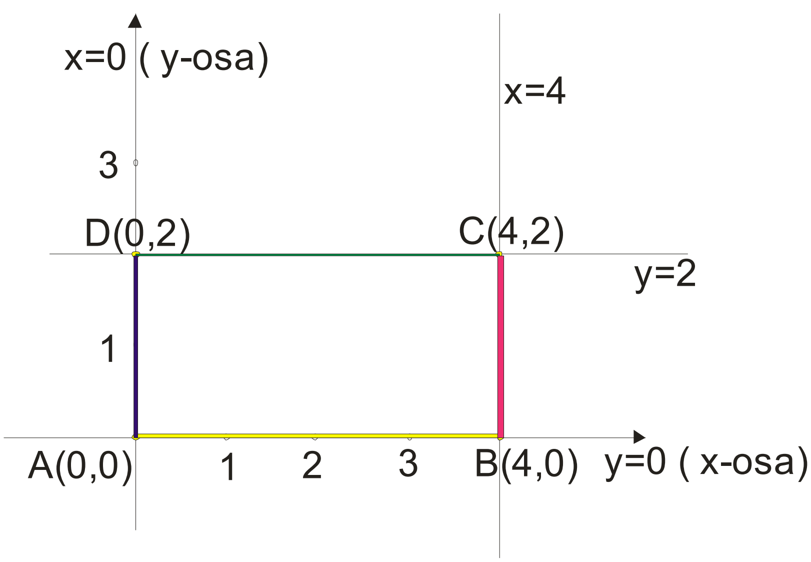
Vi opet izaberite način koji vam više odgovara ili koji zahteva vaš profesor.

6. Izračunati krivolinijski integral $\int_c xyds$ **gde je c kontura pravougaonika koji odredjuju prave**

x = 0, y = 0, x = 4, y = 2.

Rešenje:

Nacrtajmo najpre sliku :



Moramo dakle ovaj zadatak rastaviti na 4 dela , radimo svaki posebno pa posle sve saberemo:

AB: (žuta duž)

Ovde imamo pravu **y = 0** (x osa) a kako tražimo $\int\limits_{AB} \underbrace{\boxed{x}}_{\text{ovo je 0}} yds$ **, očigledno je rešenje 0.**

BC: (crvena duž)

Ovde imamo pravu x = 4 , pa moramo raditi po y. Da vas podsetimo:

Ako je kriva data u obliku c: x=x(y) i $m \le y \le n$ **tada je** $\int\limits_{c} f(x,y)ds = \int\limits_{m}^{n} f(x(y),y)\sqrt{1+(x_y^`)^2}\,dy$

Iz x = 4 sledi da je x`=0 , a sa slike vidimo da $0 \le y \le 2$

Dakle, ovde je :

$$\int\limits_{BC} xyds = \int\limits_{0}^{2} 4y \cdot \sqrt{1+0}dy = 4\int\limits_{0}^{2} ydy = 4\frac{y^2}{2}\Big|_0^2 = 4 \cdot \frac{2^2}{2} = \boxed{8}$$

CD: (zelena duž)

Ovde je prava y=2 a kako je onda y`=0 i sa slike vidimo da $0 \le x \le 4$ imamo:

$$\int\limits_{CD} xyds = \int\limits_{0}^{4} 2xdx = 2\frac{x^2}{2}\Big|_0^4 = 2 \cdot \frac{4^2}{2} = \boxed{16}$$

DA: (plava duž)

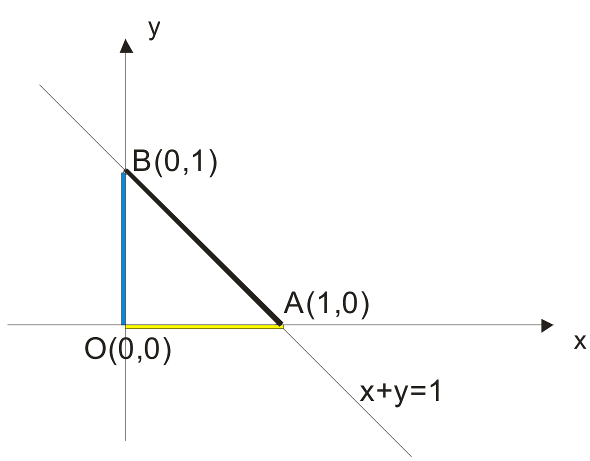
U pitanju je prava x=0 (y- osa) a tu je zadati integral $\int\limits_{c} xyds$ očigledno 0.

Sad kao konačno rešenje saberemo sva 4 rešenja koja smo dobili:

$$\int\limits_{c} xyds = 0+8+16+0 = \boxed{24}$$

7. Izračunati krivolinijski integral $\int\limits_{c} (x+y)ds$ **gde je c kontura trougla O(0,0) , A(1,0) , B(0,1).**

Rešenje:



I ovde moramo raditi za svaki deo posebno!

OA: (žuta duž)

U pitanju je x osa , znači prava y = 0

$$\int_{OA} (x+y)\,ds = \int_0^1 (x+0)dx = \int_0^1 xdx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \boxed{\frac{1}{2}}$$

AB: (crna duž)

U pitanju je prava x+y = 1 , to jest y = 1-x , pa je y` = -1

$$\int_{AB} (x+y)\,ds = \int_0^1 (x+1-x)\cdot\sqrt{1+(-1)^2}\,dx = \int_0^1 \sqrt{2}dx = \sqrt{2}\cdot x\Big|_0^1 = \boxed{\sqrt{2}}$$

BO: (plava duž)

Ovde imamo y osu, to jest pravu x=0.

$$\int_{BO} (x+y)\,ds = \int_0^1 (0+y)dy = \int_0^1 ydy = \frac{y^2}{2}\Big|_0^1 = \boxed{\frac{1}{2}}$$

Saberemo sva tri rešenja i dobijamo: $\int_c (x+y)\,ds = \frac{1}{2}+\sqrt{2}+\frac{1}{2} = 1+\sqrt{2}$

8. Naći dužinu luka prostorne krive $x = e^{-t}\cos t,\ \ y = e^{-t}\sin t,\ \ z = e^{-t}$ **ako je** $0 \le t < \infty$ **.**

Rešenje:

Da se podsetimo: dužina luka se računa po formuli $S = \int_c ds$.

Ovo ustvari znači da dužinu luka tražimo kao: $\int_c ds = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x_t^`)^2 + (y_t^`)^2 + (z_t^`)^2}\,dt$ (nema onog prvog dela)

$$x = e^{-t}\cos t \to x` = -e^{-t}\cos t + (-\sin t)e^{-t} = \boxed{e^{-t}(\sin t + \cos t)}$$

$$y = e^{-t}\sin t \to x` = -e^{-t}\sin t + \cos t e^{-t} = \boxed{e^{-t}(\cos t - \sin t)}$$

$$z = e^{-t} \to z` = \boxed{-e^{-t}}$$

Da sredimo prvo ovo pod koren , pa ćemo da se vratimo u integral:

$$\sqrt{(x_t^`)^2+(y_t^`)^2+(z_t^`)^2}=\sqrt{\left(-e^{-t}(\sin t+\cos t)\right)^2+\left(e^{-t}(\cos t-\sin t)\right)^2+(-e^{-t})^2}=$$

$$=\sqrt{e^{-2t}\left(\sin t+\cos t\right)^2+e^{-2t}\left(\cos t-\sin t\right)^2+e^{-2t}}$$

$$=\sqrt{e^{-2t}\left(\left(\sin t+\cos t\right)^2+\left(\cos t-\sin t\right)^2+1\right)}$$

$$=e^{-t}\sqrt{\sin^2 t\cancel{+2\sin t\cos t}+\cos^2 t+\sin^2 t\cancel{-2\sin t\cos t}+\cos^2 t+1}$$

$$=e^{-t}\sqrt{2(\underbrace{\sin^2 t+\cos^2 t}_{ovo\ je\ 1})+1}$$

$$\boxed{=e^{-t}\cdot\sqrt{3}}$$

Sad da izračunamo integral:

$$\int_c ds=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{(x_t^`)^2+(y_t^`)^2+(z_t^`)^2}\,dt=\int_0^\infty\sqrt{3}e^{-t}dt=\sqrt{3}\int_0^\infty e^{-t}dt$$

Pazite , ovo je nesvojstven integral!

$$\int_c ds=\sqrt{3}\int_0^\infty e^{-t}dt=\sqrt{3}\lim_{A\to\infty}\int_0^A e^{-t}dt=\sqrt{3}\lim_{A\to\infty}\left(-e^{-t}\right)\Big|_0^A=\sqrt{3}\lim_{A\to\infty}\left(\underbrace{\left(-e^{-A}\right)}_{\text{teži 0}}-\left(-e^{-0}\right)\right)=\sqrt{3}\cdot(0-(-1))=\boxed{\sqrt{3}}$$