MATRICE ZADACI (II DEO)

REŠAVANJE SISTEMA LINEARNIH ALGEBARSKIH JEDNAČINA

Sistem od ***m*** **jednačina** sa ***n*** **nepoznatih** je najčešće uopšteno dat sa:

$$\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \;...\; + a_{1n}x_n = b_1\\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \;...\; + a_{2n}x_n = b_2\\
&.\\
&.\\
&.\\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \;...\; + a_{mn}x_n = b_m
\end{aligned}$$

Ovde su: $x_1, x_2, ...x_n$ nepoznate, brojevi a_{ij} su koeficijenti a $b_1, b_2, ...b_m$ su slobodni članovi .

Iz ovog sistema mi izvlačimo tri matrice:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ . & & & \\ . & & & \\ . & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{bmatrix}$$ je matrica sistema.

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & a_{1n} & \vdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & . & . & a_{2n} & \vdots & b_2 \\ . & . & & & . & \vdots & \\ . & . & & & . & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & & & a_{mn} & \vdots & b_m \end{bmatrix}$$ je proširena matrica sistema

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ b_m \end{bmatrix}$$ je matrica sa slobodnim članovima.

Kada je A kvadratna matrica, to jest kada je broj jednačina sistema jednak sa brojem nepoznatih , onda takav sistem nazivamo **kvadratnim**. Ako je i $\det A \neq 0$ onda je on *Kramerovski*.

Ako je ***B*** **nula matrica**, sistem je **homogen**. (desno su sve nule)

Ako ***B*** **nije nula matrica**, sistem je **nehomogen**. (bar jedan slobodan član nije nula)

Koristeći ove matrice, jasno je da sistem možemo zapisati kao : $A \cdot X = B$ gde je $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_m \end{bmatrix}$ rešenje sistema.

Još neki izrazi se upotrebljavaju često , pa i njih da objasnimo:

- **jedinstveno** rešenje je kad sistem ima samo **jedno** rešenje (**odredjen** je)
- kada sistem ima više od jednog rešenja kaže se da je **neodredjen**
- kada sistem ima rešenja, bez obzira dal je jedno il beskonačno mnogo njih, kaže se da je **rešiv (saglasan, neprotivrečan)**
- kada sistem **nema rešenja** kaže se da je **nerešiv (nesaglasan, protivrečan)**

Teorema (Kroneker- Kapeli) kaže: (važi za nehomogen sistem)

Sistem ima rešenje ako i samo ako je rang matrice sistema jednak rangu matrice proširenog sistema, tj $r(A) = r(\overline{A})$

Ako sistem ima maksimalan rang *n*, važi:

i) rešenje je jedinstveno ako je $r(A) = r(\overline{A}) = n$

ii) sistem ima beskonačno mnogo rešenja ako je $r(A) = r(\overline{A}) < n$

Često se javlja problem kad posmatramo **homogen** sistem:

$$
\begin{array}{l}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ \ldots \ + a_{1n}x_n = 0 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ \ldots \ + a_{2n}x_n = 0 \\
. \\
. \\
. \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ \ldots \ + a_{mn}x_n = 0
\end{array}
$$

Ovaj sistem uvek ima rešenje $(0,0,0,...,0)$. Ovo se rešenje naziva **trivijalno** rešenje.

Pitamo se kad sistem ima i **netrivijalna** rešenja?

Homogen sistem ima netrivijalna rešenja ako i samo ako je rang matrice sistema manji od broja nepoznatih .

Posledica ove teoreme je :

Ako u homogenom sistemu važi da je broj jednačina manji od broja nepoznatih, onda sistem ima netrivijalna rešenja.

Pre nego li krenemo sa zadacima, savetujemo vam da još jednom pročitate i proučite fajl **matrice**, a posebno deo vezan za traženje **ranga matrice**.

ZADACI

1. Odrediti rang matrice u zavisnosti od parametra *a*.

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & a \\ 3 & 5 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Rešenje:

Pre nego li krenete da pravite nule ispod glavne dijagonale, nije loše da parametar prebacimo da je u zadnjoj vrsti , na krajnjoj desnoj poziciji. Zato ćemo najpre da zamenimo mesta prvoj vrsti i trećoj vrsti.

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & a \\ 3 & 5 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 3 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & a \end{bmatrix} \text{ Sad pravimo nule na naznačenim mestima } \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ \boxed{3} & 5 & 0 \\ \boxed{2} & 1 & a \end{bmatrix}$$

III vrsta minus I vrsta pomnožena sa 2 ide u III vrstu

II vrsta minus I vrsta pomnožena sa 3 ide u II vrstu

$$A\sim\begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 3 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & a \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & -7 & -3 \\ 0 & -7 & a-2 \end{bmatrix} \text{ Sad pravimo još jednu nulu na mestu } \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & -7 & -3 \\ 0 & \boxed{-7} & a-2 \end{bmatrix}$$

Od III vrste oduzmemo II i to upišemo umesto treće vrste.

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & -7 & -3 \\ 0 & \boxed{-7} & a-2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & -7 & -3 \\ 0 & 0 & a-2-(-3) \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & -7 & -3 \\ 0 & 0 & a+1 \end{bmatrix}$$ Uočimo poziciju $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & -7 & -3 \\ 0 & 0 & \boxed{a+1} \end{bmatrix}$.

Jasno je da ako je za $a+1=0 \to \boxed{a=-1}$, rang matrice 2, jer imamo matricu $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & -7 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

A, ako je $a \neq -1$, rang matrice je tri, jer dobijamo matricu $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & -7 & -3 \\ 0 & 0 & a+1 \end{bmatrix}$, čija determinanta je različita od nule, jer ako se sećate, vrednost determinante ove matrice je proizvod brojeva po glavnoj dijagonali: $\det A = 1 \cdot (-7) \cdot (a+1)$

2. Odrediti rang matrice u zavisnosti od parametra *a*.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

<u>Rešenje:</u>

Pravimo nule na mestima $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ \boxed{1} & 1 & a & 1 \\ \boxed{1} & a & 1 & 1 \\ \boxed{a} & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

II vrsta – I vrsta na mesto II vrste

III vrsta – I vrsta na mesto III vrste

IV vrsta – I vrsta pomnožena sa a na mesto IV vrste

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & a-1 & 0 & 1-a \\ 0 & 1-a & 1-a & 1-a^2 \end{bmatrix}$$. Sad pravimo nule na mestima $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & \boxed{a-1} & 0 & 1-a \\ 0 & \boxed{1-a} & 1-a & 1-a^2 \end{bmatrix}$

Uočimo treću kolonu. U njoj već ima nula koje nam treba. Zato ćemo zameniti mesta II i III koloni.

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & a-1 & 0 & 1-a \\ 0 & 1-a & 1-a & 1-a^2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & a-1 & 0 & 1-a \\ 0 & 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 1-a & 1-a & 1-a^2 \end{bmatrix}$$ saberemo II i IV vrstu pa na IV

Dalje moramo napraviti nulu na uokvirenom mestu: $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & a-1 & 0 & 1-a \\ 0 & 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 0 & \boxed{1-a} & -a^2-a+2 \end{bmatrix}$

Saberemo IV i III vrstu i to upišemo na mestu IV vrste...

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & a-1 & 0 & 1-a \\ 0 & 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 0 & 1-a & -a^2-a+2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & a-1 & 0 & 1-a \\ 0 & 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 0 & 0 & -a^2-2a+3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & a-1 & 0 & 1-a \\ 0 & 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 0 & 0 & -(a-1)(a+3) \end{bmatrix}$$

Odavde je već izvesno:

Ako je $a-1 \neq 0 \wedge a+3 \neq 0 \to a \neq 1 \wedge a \neq -3$ rang matrice je 4. Ako je $a-1=0 \to a=1$ matrica postaje

$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ pa je rang matrice 1.Ako je $a=-3$ imamo $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & -4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ da je rang 3.

3. Dokazati da sledeći sistem ima netrivijalna rešenja:

$$\begin{aligned} x+2y-z-t-3u &= 0 \\ 3x+4y-5z-3t-u &= 0 \\ 2x+3y-3z-2t-2u &= 0 \\ 2x+5y-z-2t-10u &= 0 \end{aligned}$$

<u>**Rešenje:**</u>

Ovde nam je posao da dokažemo da je rang manji od maksimalnog mogućeg ranga(to jest od 4) , jer je sistem ***homogen*** i važi: **Ako u homogenom sistemu važi da je <u>broj jednačina</u> <u>manji</u> od <u>broja nepoznatih</u>, onda sistem ima netrivijalna rešenja.**

Uočimo matricu sistema: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 & -3 \\ 3 & 4 & -5 & -3 & -1 \\ 2 & 3 & -3 & -2 & -2 \\ 2 & 5 & -1 & -2 & -10 \end{bmatrix}$

Kao i obično, najpre pravimo nule na mestima $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 & -3 \\ \boxed{3} & 4 & -5 & -3 & -1 \\ \boxed{2} & 3 & -3 & -2 & -2 \\ \boxed{2} & 5 & -1 & -2 & -10 \end{bmatrix}$.

II vrsta - I vrsta pomnožena sa 3 ide na mesto II vrste

III vrsta - I vrsta pomnožena sa 2 ide na mesto III vrste

IV vrsta - I vrsta pomnožena sa 2 ide na mesto IV vrste

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 & -3 \\ \boxed{3} & 4 & -5 & -3 & -1 \\ \boxed{2} & 3 & -3 & -2 & -2 \\ \boxed{2} & 5 & -1 & -2 & -10 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & 8 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

Sledeće nule moraju biti na mestima: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & 8 \\ 0 & \boxed{-1} & -1 & 0 & 4 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 0 & -4 \end{bmatrix}$

III vrsta pomnožena sa dva minus II vrsta ide na mesto III vrste

IV vrsta pomnožena sa dva plus II vrsta na mesto IV vrste

Dobijamo matricu: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Jasno je da je rang ove matrice 2, što je manje od maksimalnog ranga, to jest , dokazali smo da sistem ima netrivijalna rešenja.

U sledećem primeru ćemo pokazati kako se ona traže...

4. U zavisnosti od parametra m diskutovati rešenja sistema:

$$\begin{aligned} &x+2y+3z+mt=0\\ &x+2y+(m+2)z+2t=0\\ &x+(m+1)y+3z+2t=0\\ &mx+2y+3z+4t=0 \end{aligned}$$

<u>Rešenje:</u>

Opet se radi o homogenom sistemu...

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & m\\ 1 & 2 & m+2 & 2\\ 1 & m+1 & 3 & 2\\ m & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Pravimo nule: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & m\\ \boxed{1} & 2 & m+2 & 2\\ \boxed{1} & m+1 & 3 & 2\\ \boxed{m} & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ $\begin{aligned} &IIvrsta-Ivrsta\to IIvrsta\\ &IIIvrsta-Ivrsta\to IIIvrsta\\ &IVvrsta-Ivrsta\cdot m\to IVvrsta \end{aligned}$

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & m\\ 1 & 2 & m+2 & 2\\ 1 & m+1 & 3 & 2\\ m & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & m\\ 0 & 0 & m-1 & 2-m\\ 0 & m-1 & 0 & 2-m\\ 0 & 2(1-m) & 3(1-m) & 4-m^2 \end{bmatrix}$$

Zamenimo mesta II i III vrsti...

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & m\\ 1 & 2 & m+2 & 2\\ 1 & m+1 & 3 & 2\\ m & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & m\\ 0 & 0 & m-1 & 2-m\\ 0 & m-1 & 0 & 2-m\\ 0 & 2(1-m) & 3(1-m) & 4-m^2 \end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & m\\ 0 & m-1 & 0 & 2-m\\ 0 & 0 & m-1 & 2-m\\ 0 & 2(1-m) & 3(1-m) & 4-m^2 \end{bmatrix}$$

$IVvrsta+IIvrsta\cdot 2\to IVvrsta$

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & m \\ 0 & m-1 & 0 & 2-m \\ 0 & 0 & m-1 & 2-m \\ 0 & 2(1-m) & 3(1-m) & 4-m^2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & m \\ 0 & m-1 & 0 & 2-m \\ 0 & 0 & m-1 & 2-m \\ 0 & 0 & 3(1-m) & 8-2m-m^2 \end{bmatrix}$$

I još da napravimo nulu na uokvirenom mestu: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & m \\ 0 & m-1 & 0 & 2-m \\ 0 & 0 & m-1 & 2-m \\ 0 & 0 & \boxed{3(1-m)} & 8-2m-m^2 \end{bmatrix}$

$IVvrsta + IIIvrsta \cdot 3 \to IVvrsta$

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & m \\ 0 & m-1 & 0 & 2-m \\ 0 & 0 & m-1 & 2-m \\ 0 & 0 & 3(1-m) & 8-2m-m^2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & m \\ 0 & m-1 & 0 & 2-m \\ 0 & 0 & m-1 & 2-m \\ 0 & 0 & 0 & 14-5m-m^2 \end{bmatrix}$$

Kao rang ove matrice mora biti manji od 4, da bi sistem imao netrivijalna rešenja, na mestu

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & m \\ 0 & m-1 & 0 & 2-m \\ 0 & 0 & m-1 & 2-m \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{14-5m-m^2} \end{bmatrix}$ **mora** biti 0.

Dakle:

$14-5m-m^2=0$

$m^2+5m-14=0 \to m_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \dfrac{-5 \pm \sqrt{5^2-4\cdot 1\cdot(-14)}}{2}$

$m_1 = 2$

$m_2 = -7$

Postoje dve vrednosti za parametar m, za koje sistem ima netrivijalna rešenja.

Moramo proučiti obe mogućnosti.

za $m=2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & m \\ 0 & m-1 & 0 & 2-m \\ 0 & 0 & m-1 & 2-m \\ 0 & 0 & 0 & 14-5m-m^2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Iz treće vrste imamo $1 \cdot z = 0 \to \boxed{z=0}$

Iz druge vrste imamo $1 \cdot y = 0 \to \boxed{y=0}$

Iz prve vrste imamo $1x+2y+3z+2t=0 \to x+2t=0 \to \boxed{x=-2t}$

Rešenje je dakle $(x,y,z,t)=(-2t,0,0,t)$ gde je $t \in R$

za $m=-7$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & m \\ 0 & m-1 & 0 & 2-m \\ 0 & 0 & m-1 & 2-m \\ 0 & 0 & 0 & 14-5m-m^2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -7 \\ 0 & -8 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & -8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Iz treće vrste imamo $-8 \cdot z + 9t = 0 \to 8z = 9t \to \boxed{z=\frac{9t}{8}}$

Iz druge vrste imamo $-8 \cdot y + 9t = 0 \to 8y = 9t \to \boxed{y=\frac{9t}{8}}$

Iz prve vrste imamo $1x+2y+3z-7t=0 \to x+\frac{18t}{8}+\frac{27t}{8}-7t=0 \to$

$8x+18t+27t-56t=0 \to 8x=11t \to \boxed{x=\frac{11t}{8}}$

Rešenje je dakle $(x,y,z,t)=(\frac{11t}{8},\frac{9t}{8},\frac{9t}{8},t)$ gde je $t \in R$

Zaključak bi bio:

Za $m_1 \neq 2, m_2 \neq -7$ sistem ima samo trivijalna rešenja (0,0,0,0)

Za *m=2* sistem ima rešenja $(x,y,z,t)=(-2t,0,0,t)$ gde je $t \in R$

Za *m= -7* sistem ima rešenja $(x,y,z,t)=(\frac{11t}{8},\frac{9t}{8},\frac{9t}{8},t)$ gde je $t \in R$

5. U zavisnosti od parametra *a* diskutovati rešenja sistema:

$$ax+y+z=0$$
$$x+ay+z=2$$
$$x+y+az=a$$

<u>Rešenje:</u>

Ovde se radi o **nehomogenom** sistemu.

Matrica sistema je $A=\begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & a \\ 1 & 1 & a \end{bmatrix}$, a matrica proširenog sistema je $\overline{A}=\begin{bmatrix} a & 1 & 1 & \vdots & 0 \\ 1 & a & a & \vdots & 2 \\ 1 & 1 & a & \vdots & a \end{bmatrix}$.

U matrici proširenog sistema pravimo nule na već opisani način...

$$\overline{A}=\begin{bmatrix} a & 1 & 1 & \vdots & 0 \\ \boxed{1} & a & a & \vdots & 2 \\ \boxed{1} & 1 & a & \vdots & a \end{bmatrix}$$ najpre nule na ova dva mesta…

$$\overline{A}=\begin{bmatrix} a & 1 & 1 & \vdots & 0 \\ 1 & a & a & \vdots & 2 \\ 1 & 1 & a & \vdots & a \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} a & 1 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & a^2-1 & a-1 & \vdots & 2a \\ 0 & a-1 & a^2-1 & \vdots & a^2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & 1 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & a^2-1 & a-1 & \vdots & 2a \\ 0 & \boxed{a-1} & a^2-1 & \vdots & a^2 \end{bmatrix}$$ još ovde da napravimo nulu…

$$\overline{A}=\begin{bmatrix} a & 1 & 1 & \vdots & 0 \\ 1 & a & a & \vdots & 2 \\ 1 & 1 & a & \vdots & a \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} a & 1 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & a^2-1 & a-1 & \vdots & 2a \\ 0 & a-1 & a^2-1 & \vdots & a^2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} a & 1 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & (a-1)(a+1) & a-1 & \vdots & 2a \\ 0 & 0 & a(a-1)(a+2) & \vdots & a(a-1)(a+2) \end{bmatrix}$$

Sad koristimo Kroneker Kapelijevu teoremu:

Sistem ima rešenje ako i samo ako je rang matrice sistema jednak rangu matrice proširenog sistema, tj $r(A)=r(\overline{A})$

Ako sistem ima maksimalan rang *n*, važi:

i) rešenje je jedinstveno ako je $r(A)=r(\overline{A})=n$

ii) sistem ima beskonačno mnogo rešenja ako je $r(A)=r(\overline{A})<n$

Posmatrajmo $\begin{bmatrix} a & 1 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & (a-1)(a+1) & a-1 & \vdots & 2a \\ 0 & 0 & \boxed{a(a-1)(a+2)} & \vdots & \boxed{a(a-1)(a+2)} \end{bmatrix}$.

Da bi sistem imao jedinstveno rešenje, rang sistema mora biti jednak rangu proširenog sistema.

Onda je jasno da na uokvirenim pozicijama NE SMEJU biti nule.

To je znači **uslov** da sistem ima jedinstveno rešenje. $a(a-1)(a+2) \neq 0$

Kako je svaka kolona vezana za po jednu nepoznatu, krenućemo od treće vrste, naći nepoznatu z, pa iz druge vrste naći nepoznatu y i na kraju iz prve vrste naći nepoznatu x.

$$\begin{array}{ccccc} \begin{bmatrix} a & 1 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & (a-1)(a+1) & a-1 & \vdots & 2a \\ 0 & 0 & a(a-1)(a+2) & \vdots & a(a-1)(a+2) \end{bmatrix} \\ \uparrow \quad\quad \uparrow \quad\quad \uparrow \\ \text{x} \quad\quad \text{y} \quad\quad \text{z} \end{array}$$

<u>treća jednačina:</u>

$a(a-1)(a+2)\cdot z = a(a-1)(a+2) \rightarrow \boxed{z=1}$, naravno za $a \neq 0, a \neq 1, a \neq -2$

<u>druga jednačina:</u>

$(a-1)(a+1)\cdot y + (a-1)\cdot z = 2a$

$(a-1)(a+1)\cdot y + (a-1)\cdot 1 = 2a$

$(a-1)(a+1)\cdot y = 2a - a + 1$

$(a-1)(a+1)\cdot y = a+1$

$y = \frac{\cancel{a+1}}{(a-1)\cancel{(a+1)}} \rightarrow \boxed{y = \frac{1}{a-1}}$

<u>prva jednačina:</u>

$ax + y + z = 0$

$ax + \frac{1}{a-1} + 1 = 0 \rightarrow \boxed{x = \frac{1}{1-a}}$

Dobili smo jedinstveno rešenje: $(x, y, z) = (1, \frac{1}{a-1}, \frac{1}{1-a})$

Ali tu **nije** kraj zadatka...

Moramo ispitati i situacije kad je $a+2=0 \rightarrow a=-2$ $\quad i \quad$ $a-1=0 \rightarrow a=1$

Za $\underline{a=1}$

$$\begin{bmatrix} a & 1 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & (a-1)(a+1) & a-1 & \vdots & 2a \\ 0 & 0 & a(a-1)(a+2) & \vdots & a(a-1)(a+2) \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} a & 1 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$$

Vrednost $a=1$ smo zamenili u dobijenoj matrici. Novonastala matrica nam govori sledeće:

Rang sistema je 1, jer posmatramo samo $\begin{bmatrix} a & 1 & 1 & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & \end{bmatrix}$ a rang proširenog sistema je 2. Znači da ovde sistem **nema** rešenja.

Za $\underline{a=-2}$

$$\begin{bmatrix} a & 1 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & (a-1)(a+1) & a-1 & \vdots & 2a \\ 0 & 0 & a(a-1)(a+2) & \vdots & a(a-1)(a+2) \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 3 & -3 & \vdots & -4 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$$

Ovde je rang sistema jednak rangu proširenog sistema, tj $r(A) = r(\overline{A}) = 2 < 4,$ ali kako je rang manji od maksimalnog ranga, sistem će imati beskonačno mnogo rešenja, odnosno : neodredjen je.

<u>druga jednačina:</u>

$3y - 3z = -4$

$3y = 3z - 4$

$$\boxed{y = \frac{3z-4}{3}}$$

<u>prva jednačina:</u>

$-2x + y + z = 0$

$-2x + \frac{3z-4}{3} + z = 0$

$$\boxed{x = \frac{3z-2}{3}}$$

Dve nepoznate, x i y, smo izrazili preko treće, preko z. Rešenja su :

$$(x, y, z) = \left(\frac{3z-2}{3}, \frac{3z-4}{3}, z\right) \qquad z \in R$$

6. U zavisnosti od parametra *p*, diskutovati i rešiti sistem:

$$\begin{aligned}
&x+2y+3z+5u=13\\
&2x+2y+z+3u=11\\
&x+y+z+u=3\\
&2x+2y+2z+pu=3
\end{aligned}$$

<u>Rešenje:</u>

Oformimo matricu proširenog sistema i radimo opisani postupak...

$$\left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 2 & 3 & 5 & 13\\ 2 & 2 & 1 & 3 & 11\\ 1 & 1 & 1 & 1 & 3\\ 2 & 2 & 2 & p & 3 \end{array}\right] \quad \begin{array}{c} IIvrsta - Ivrsta\cdot 2 \to IIvrsta\\ IIIvrsta - Ivrsta \to IIIvrsta\\ IVvrsta - Ivrsta\cdot 2 \to IVvrsta \end{array}$$

$$\sim\left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 2 & 3 & 5 & 13\\ 0 & -2 & -5 & -7 & -15\\ 0 & -1 & -2 & -4 & -10\\ 0 & -2 & -4 & p-10 & -23 \end{array}\right] \quad II\ i\ III\ vrsta\ zamene\ mesta$$

$$\sim\left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 2 & 3 & 5 & 13\\ 0 & -1 & -2 & -4 & -10\\ 0 & -2 & -5 & -7 & -15\\ 0 & -2 & -4 & p-10 & -23 \end{array}\right] \quad \begin{array}{c} IIIvrsta - IIvrsta\cdot 2 \to IIIvrsta\\ IVvrsta - IIvrsta\cdot 2 \to IVvrsta \end{array}$$

$$\sim\left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 2 & 3 & 5 & 13\\ 0 & -1 & -2 & -4 & -10\\ 0 & 0 & -1 & 1 & 5\\ 0 & 0 & 0 & p-2 & -3 \end{array}\right]$$

Ispod glavne dijagonale smo napravili nule. Sad diskutujemo. Uočimo poziciju sa parametrom od koje nam zavisi rang sistema: $\sim\left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 2 & 3 & 5 & 13\\ 0 & -1 & -2 & -4 & -10\\ 0 & 0 & -1 & 1 & 5\\ 0 & 0 & 0 & \boxed{p-2} & -3 \end{array}\right]$. Ako je ovde nula, to jest, ako je **p=2,** $\sim\left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 2 & 3 & 5 & 13\\ 0 & -1 & -2 & -4 & -10\\ 0 & 0 & -1 & 1 & 5\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right]$

vidimo da je rang matrice sistema 3 a da je rang matrice proširenog sistema 4, a po teoremi Kroneker Kapelija tada sistem nema rešenja.

Dakle, da bi sistem imao rešenja, **mora da** je $p-2 \neq 0 \to \boxed{p \neq 2}$

Sad krenemo od četvrte vrste i tražimo vrednosti nepoznatih...Evo da napišemo sve četiri jednačine:

$$
\begin{array}{ll}
x+2y+3z+5u=13 & \text{iz prve vrste} \\
-y-2z-4u=-10 & \text{iz druge vrste} \\
-z+u=5 & \text{iz treće vrste} \\
(p-2)u=-3 & \text{iz četvrte vrste}
\end{array}
$$

$$(p-2)u=-3 \rightarrow \boxed{u=\frac{-3}{p-2}}$$

$$-z+u=5$$
$$z=u-5$$
$$z=\frac{-3}{p-2}-5 \rightarrow z=\frac{-3-5p+10}{p-2} \rightarrow \boxed{z=\frac{7-5p}{p-2}}$$

itd…

Dobijamo rešenje: $\boxed{u=\frac{-3}{p-2}, z=\frac{7-5p}{p-2}, y=\frac{20p-22}{p-2}, x=\frac{12(1-p)}{p-2}}$

Evo jednog primera kako rešiti sistem jednačina pomoću inverzne matrice.

7. Rešiti sistem:

$$
\begin{aligned}
x+y+z&=9 \\
x+2y+3z&=16 \\
x+3y+4z&=21
\end{aligned}
$$

<u>Rešenje:</u>

Iz zadatog sistema najpre izdvojimo matrice:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 4\end{bmatrix} \qquad X=\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix}9\\ 16\\ 21\end{bmatrix}$$

Oformimo matričnu jednačinu:

$$AX=B$$
$$X=A^{-1}\cdot B$$
$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\cdot adjA$$

Sad radimo ceo postupak...

$$\det A=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&3&4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&3&4\end{vmatrix}\begin{matrix}1&1\\1&2\\1&3\end{matrix}=8+3+3-4-9-2=-1$$, znači da postoji inverzna matrica…

$$A=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&3&4\end{bmatrix}\rightarrow$$

$$A_{11}=+\begin{vmatrix}2&3\\3&4\end{vmatrix}=-1;\quad A_{21}=-\begin{vmatrix}1&1\\3&4\end{vmatrix}=-1;\quad A_{31}=+\begin{vmatrix}1&1\\2&3\end{vmatrix}=1;$$

$$A_{12}=-\begin{vmatrix}1&3\\1&4\end{vmatrix}=-1;\quad A_{22}=+\begin{vmatrix}1&1\\1&4\end{vmatrix}=3;\quad A_{32}=-\begin{vmatrix}1&1\\1&3\end{vmatrix}=-2;$$

$$A_{13}=+\begin{vmatrix}1&2\\1&3\end{vmatrix}=1;\quad A_{23}=-\begin{vmatrix}1&1\\1&3\end{vmatrix}=-2;\quad A_{33}=+\begin{vmatrix}1&1\\1&2\end{vmatrix}=1$$

$$adjA=\begin{bmatrix}-1&-1&1\\-1&3&-2\\1&-2&1\end{bmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\cdot adjA$$

$$A^{-1}=\frac{1}{-1}\begin{bmatrix}-1&-1&1\\-1&3&-2\\1&-2&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&-1\\1&-3&2\\-1&2&-1\end{bmatrix}$$

$$X=A^{-1}\cdot B$$

$$X=\begin{bmatrix}1&1&-1\\1&-3&2\\-1&2&-1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}9\\16\\21\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9+16-21\\9-48+42\\-9+32-21\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\3\\2\end{bmatrix}$$

$$\boxed{X=\begin{bmatrix}4\\3\\2\end{bmatrix}}$$

Rešenje je dakle: $(x,y,z)=(4,3,2)$

Vidite i sami da je ovaj postupak težak, pa ga primenjujte samo kad to od vas izričito traže…