

1. Operacije i zakoni operacija

Neka je S neprazan skup .

Operacija dužine n skupa S jeste svako preslikavanje $f : S^n \rightarrow S$ ($S^n = S \times S \times S \dots \times S$
 $n\text{-puta}$)

Ako je $n = 1$, onda operaciju nazivamo **unarna**. ($f : S \rightarrow S$)

Ako je $n = 2$, onda operaciju nazivamo **binarna**. ($f : S^2 \rightarrow S$)

Primer 1.

Sledeća tablica definiše jednu unarnu operaciju na skupu $\{a,b,c,d,e\}$

a	b	c	d	e
e	a	a	c	d

Primer 2.

Operacija komplementiranja (pogledaj fajl o skupovima) je unarna operacija u skupu $P(X)$.

Primer 3.

Funkcija $n \rightarrow n^2$ je jedna unarna operacija u skupu N (prirodni brojevi)

Primer 4.

Negacija je jedna unarna operacija, da se podsetimo:

Negacija iskaza p je iskaz $\neg p$ kojem odgovara tablica:

Očigledno je iskaz $\neg p$ tačan samo u slučaju kada je iskaz p netačan.

p	$\neg p$
T	\perp
\perp	T

Nas posebno zanimaju binarne operacije (operacije dužine 2) jer su najznačajnije, bar za dosadašnje poznavanje

matematike.

Evo nekoliko primera binarnih operacija:

Primer 1.

Funkcija $(x, y) \rightarrow x + y$ sa N^2 u N je poznata operacija sabiranja prirodnih brojeva.

Primer 2.

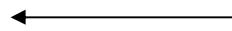
Neka je $S = \{T, \perp\}$ (tačno i netačno).

Dobro poznate binarne operacije iz logike su:

Konjukcija iskaza p i q je iskaz $p \wedge q$ kojem odgovara sledeća istinitosna tablica:

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	\perp	\perp
\perp	T	\perp
\perp	\perp	\perp

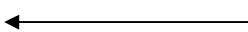
Konjukcija je tačna samo ako su p i q tačni iskazi.



Disjunkcija iskaza p i q je iskaz $p \vee q$ kojem odgovara sledeća tablica:

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	\perp	T
\perp	T	T
\perp	\perp	\perp

Disjunkcija je netačna samo ako su oba iskaza , i p i q, netačni.



Kako bi ovo bilo zadato tablicom sada u ovoj oblasti? Pogledajmo:

Λ	T	\perp
T	T	\perp
\perp	\perp	\perp

konjukcija

V	T	\perp
T	T	T
\perp	T	\perp

disjunkcija

Naravno, implikacija i ekvivalencija su takodje binarne operacije....

Primer 3.

Sledeća tablica (Kelijeva tablica) , definiše jednu binarnu operaciju * na skupu { a,b,c,d }

*	a	b	c	d
a	a	c	d	b
b	b	d	a	c
c	c	a	d	b
d	b	b	a	b

Ovde samo morate da vodite računa da prvo gledamo vrstu pa kolonu....

Recimo:

*	a	b	c	d
a	a	c	d	b
b	b	d	a	c
c	c	a	d	b
d	b	b	a	b

$$a * b = c$$

*	a	b	c	d
a	a	c	d	b
b	b	d	a	c
c	c	a	d	b
d	b	b	a	b

$$b * a = b$$

*	a	b	c	d
a	a	c	d	b
b	b	d	a	c
c	c	a	d	b
d	b	b	a	b

$$c * d = b$$

Sada da se upoznamo (podsetimo) nekih zakona operacija:

1. Za binarnu operaciju * u skupu X važi *asocijativni zakon* ako :

$$(\forall x, y, z \in X) \quad (x * (y * z) = (x * y) * z)$$

Na primer, za operaciju + (plus) sabiranja u skupu prirodnih brojeva važi asocijativni zakon jer je recimo

$$2 + (5 + 3) = (2 + 5) + 3 = 10 \text{ dok za operaciju } (-) \text{ oduzimanje to ne važi}$$

$$2 - (5 - 3) \neq (2 - 5) - 3 \text{ jer je}$$

$$2 - (5 - 3) = 2 - 2 = 0$$

$$(2 - 5) - 3 = -3 - 3 = -6$$

Za operaciju množenja važi asocijativni zakon,naravno u odgovarajućem skupu brojeva,

dok za operaciju deljenja i stepenovanja ne važi jer je, na primer :

$$\left. \begin{array}{l} (100 : 10) : 2 = 10 : 2 = 5 \\ 100 : (10 : 2) = 100 : 5 = 20 \end{array} \right\} \rightarrow 100 : (10 : 2) \neq (100 : 10) : 2$$

$$(2^3)^4 = 8^4 = 4096 \text{ a } 2^{(3^4)} = 2^{81} \text{ a ovo je broj mnogo veći od 4096. Dakle } (2^3)^4 \neq 2^{(3^4)}$$

2. Za binarnu operaciju * u skupu X važi komutativni zakon ako :

$$(\forall x, y \in X) (x * y = y * x)$$

Na primer, sabiranje i množenje u skupu prirodnih brojeva je komutativna operacija $2 + 3 = 3 + 2$ ili $2 \cdot 3 = 3 \cdot 2$

Ali oduzimanje i deljenje nisu komutativne na odgovarajućem skupu brojeva:

$$2 - 7 \neq 7 - 2 \quad \text{i} \quad 10 : 5 \neq 5 : 10$$

Takodje i operacija stepenovanja nije komutativna, jer na primer $2^3 \neq 3^2$

3. Neka su u skupu X zadate dve binarne operacije * i \odot . Kaže se da za operaciju \odot važi

levi distributivni zakon u odnosu na operaciju *, odnosno desni distributivni zakon ako:

$$(\forall x, y, z \in X) (x \odot (y * z) = (x \odot y) * (x \odot z)) \quad \text{levi distributivni zakon}$$

$$(\forall x, y, z \in X) ((x * y) \odot z = (x \odot z) * (y \odot z)) \quad \text{desni distributivni zakon}$$

Ako važi i levi i desni distributivni zakon , onda se kaže da za operaciju \odot važi distributivni zakon u odnosu na operaciju * .

Recimo, operacija množenja je distributivna u odnosu na operaciju sabiranja u skupu celih brojeva, ali operacija sabiranja nije distributivna u odnosu na množenje, jer je na primer:

$$\left. \begin{array}{l} 5 + (2 \cdot 3) = 5 + 6 = 11 \\ (5 + 2) \cdot (5 + 3) = 7 \cdot 8 = 56 \end{array} \right\} \rightarrow \boxed{5 + (2 \cdot 3) \neq (5 + 2) \cdot (5 + 3)}$$

4. Element $a \in X$ je

regularan s leva u odnosu na operaciju * ako $(\forall x, y \in X) (a * x = a * y \rightarrow x = y)$

regularan s desna u odnosu na operaciju * ako $(\forall x, y \in X) (x * a = y * a \rightarrow x = y)$

Ako je $a \in X$ regularan i s leva i s desna onda je regularan.

Regularnost daje mogućnost skraćivanja (kancelacije)

Ovde moramo voditi računa o kom skupu brojeva se radi....Ako recimo posmatramo skup nenegativnih celih brojeva $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots\}$ onda element 0 nije regularan u odnosu na operaciju množenja jer , na primer:

$$0 \cdot 5 = 0 \cdot 7 \quad \text{ali je } 5 \neq 7$$

5. Ako postoji element $e \in X$ takav da $(\forall x \in X)(e * x = x * e = x)$ onda se taj element zove **neutral. (neutralni element)**

Na primer , za operaciju sabiranja neutral je nula : $7 + 0 = 0 + 7 = 7$,

Za operaciju množenja neutral je jedinica : $7 \cdot 1 = 1 \cdot 7 = 7$

Ako postoji neutralni element on je jedinstven!

6. Neka u odnosu na operaciju * u skupu X postoji neutralni element e . Element $x' \in X$ je inverzni

element elementa $x \in X$ ako je $x * x' = x' * x = e$

Da vas ne zbuni to što neki profesori ovaj inverzni element još zovu i simetrični element.

Evo objašnjenja:

Za operaciju množenja (multiplikativna operacija) element x' je baš **inverzni** element i oblika je :

$x' = \frac{1}{x}$ jer je $x \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x} \cdot x = 1$, naravno kad iz datog skupa izbacimo 0.

Za operaciju sabiranja (aditivna operacija) element x' je **suprotan** element i oblika je :

$x' = -x$ jer je $x + (-x) = (-x) + x = 0$

Kao i uvek, naš savet je da radite, odnosno zovete ovaj element kako zahteva vaš profesor.....

Ako postoji inverzni (simetrični) element on je jedinstven!

Da rezimiramo:

Mi ćemo proučavati binarne operacije , a zakone koje ispitujemo su :

$(\forall x, y, z \in X) (x * (y * z) = (x * y) * z)$ **asocijativni zakon**

$(\forall x, y \in X) (x * y = y * x)$ **komutativni zakon**

$(\forall x, y, z \in X) (x \odot (y * z) = (x \odot y) * (x \odot z))$ i $((x * y) \odot z = (x \odot z) * (y \odot z))$ **distributivni zakon**

$(\forall x \in X)(e * x = x * e = x)$ **postoji neutralni element i**

$x * x' = x' * x = e$ **postoji inverzni element**