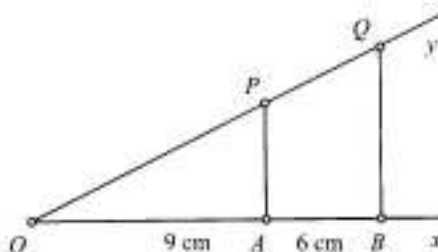


274) Две паралелне праве секу крак  $Ox$  једног угла у тачкама  $A$  и  $B$ , а крак  $Oy$  у тачкама  $P$  и  $Q$ . Ако су подаци као на цртежу, одредити:

А)  $OP : PQ$ ;

Б)  $OQ : OP$ .

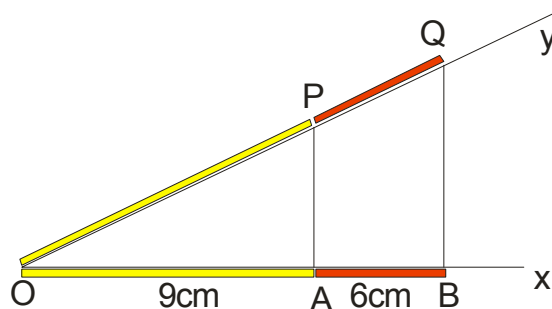


А)

Најпре на полуправој  $Oy$  уočимо date дужи  $OP$  и  $PQ$ . Далје размишљамо које дужи су њима одговарајуће на  $Ox$ .

То су  $OA$  која одговара дужи  $OP$  и  $AB$  која одговара дужи  $PQ$ .

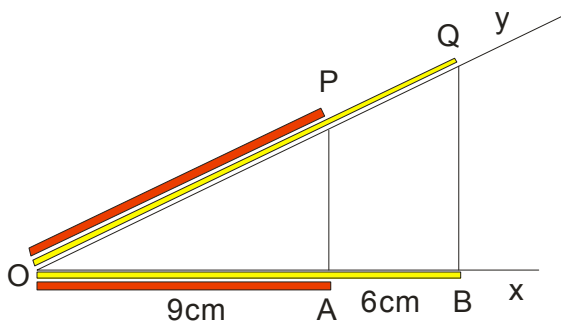
Погледајмо то и на слици:



Користимо Талесову теорему:

$OP : PQ = OA : AB = 9 : 6$  и ако мало скратимо са 3, добијамо  $OP : PQ = OA : AB = 9 : 6 = 3 : 2$

Б)  $OQ : OP = ?$



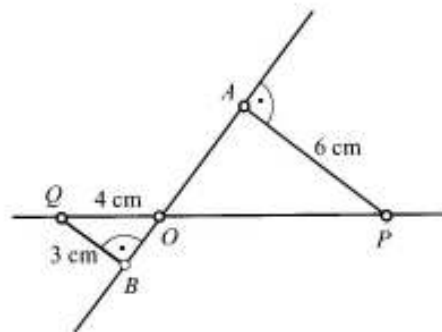
Дужи  $OQ$  одговара дуž  $OB$  (пази :  $OB = 9 + 6 = 15$ ) док дужи  $OP$  одговара дуž  $OA$ .

Дакле

$OQ : OP = OB : OA = 15 : 9$  и ако опет мало скратимо са 3, добијамо

$OQ : OP = OB : OA = 15 : 9 = 5 : 3$

275. Ако су ознаке и подаци као на приложеном цртежу, одредити дужине дужи  $OP$  и  $OA$ .



Proučimo najpre sliku.

Trouglovi  $OBQ$  i  $AOP$  su slični jer su pravougli i uglovi  $BOQ$  i  $POA$  su im jednaki kao unakrsni!

Najpre ćemo na trougao  $OBQ$  primeniti Pitagorinu teoremu i naći stranicu  $OB$ .

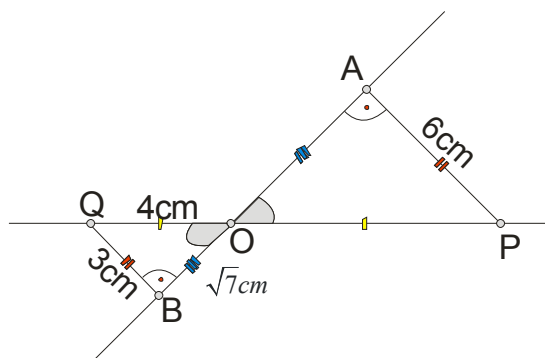
$$OB^2 = OQ^2 - QB^2$$

$$OB^2 = 4^2 - 3^2$$

$$OB^2 = 16 - 9$$

$$OB^2 = 7$$

$$OB = \sqrt{7} \text{ cm}$$



Odgovarajuće stranice smo obeležili “crticama”.

$$QB : AP = QO : OP$$

$$3 : 6 = 4 : OP$$

$$3 \cdot OP = 6 \cdot 4$$

$$OP = \frac{6 \cdot 4}{3}$$

$$OP = 4 \text{ cm}$$

$$QB : AP = BO : OA$$

$$3 : 6 = \sqrt{7} : OA$$

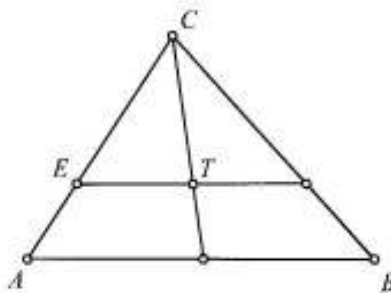
$$3 \cdot OA = 6 \cdot \sqrt{7}$$

$$OA = \frac{6\sqrt{7}}{3}$$

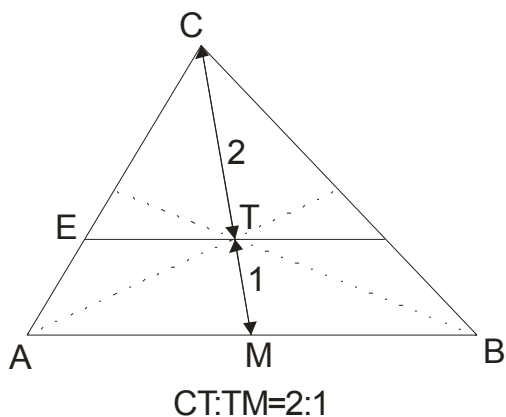
$$OA = 2\sqrt{7} \text{ cm}$$

276. Прва  $p$  садржи тежиште  $T$  троугла  $ABC$ , паралелна је правој  $AB$  и сече праву  $AC$  у тачки  $E$ . Одредити размере:

- А)  $CE : EA$ ;  
 Б)  $AC : AE$ .



Iskoristićemo činjenicu da težište deli težišnu duž u odnosu 2 : 1. Obeležimo tačku M na slici.



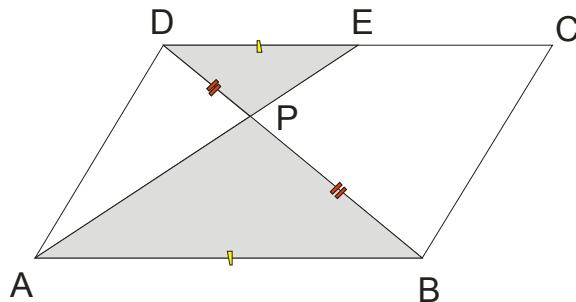
Dalje upotrebjavamo **Talesovu teoremu**:

$$CE : EA = CT : TM = 2 : 1 \quad (\text{Jer na CE odgovara CT, a na EA odgovara TM})$$

$$AC : AE = CM : TM = 3 : 1 \quad (\text{Jer na AC odgovara CM ( 2+1 = 3) , a na AE odgovara TM})$$

277. Тачка  $E$  је средиште странице  $CD$  паралелограма  $ABCD$ . Ако се дужи  $AE$  и  $BD$  секу у тачки  $P$ , одредити размеру  $BP : PD$ .

Ovde je slika neophodna!



Uočimo trouglove  $ABP$  i  $DPE$ .

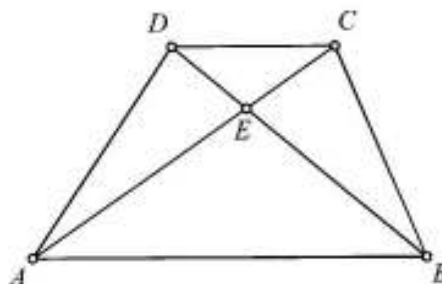
Oni su slični jer imaju jednake uglove  $\angle BAP = \angle DEP$  i  $\angle ABP = \angle PED$  kao uglove sa paralelnim kracima ( a možemo ih posmatrati i kao uglove na transversali) a i  $\angle APB = \angle DPE$  kao unakrsni uglovi.

Iz njihove sličnosti proizilazi da su odgovarajuće stranice proporcionalne . Pronađimo odgovarajuće stranice i obeležimo ih 'po naški' crticama.

$BP : PD = AB : DE$  Kako je tačka E na sredini stranice DC , biće:

$$BP : PD = AB : DE = 2 : 1$$

278. Jedna od osnovica trapeza  $ABCD$  je 4 cm, a njegova srednja linija 5 cm. Ako se dijagonale tog trapeza seku u tački E, odrediti njegovu drugu osnovicu i razmeru  $AE : EC$ .



Nađimo najpre drugu osnovicu i dopunimo dati crtež:

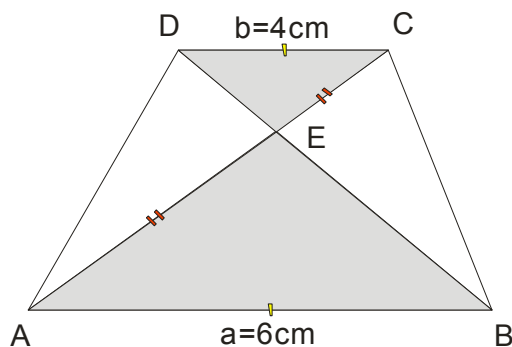
$$b = 4\text{cm}$$

$$m = 5\text{cm}$$

$$a = ?$$

$$m = \frac{a+b}{2}$$

$$5 = \frac{a+4}{2} \rightarrow a+4 = 10 \rightarrow a = 6\text{cm}$$



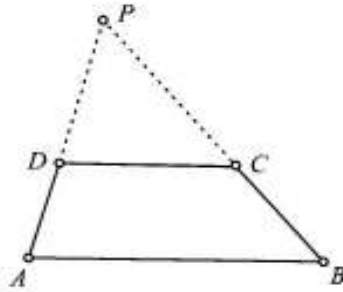
Trouglovi ABE i DEC su slični, jer imaju jednake uglove  $\angle BAE = \angle DCE$  i  $\angle ABE = \angle CDE$  , koji su jednaki kao uglovi sa paralelnim kracima a i  $\angle AEB = \angle DEC$  ( unakrsni)

Obeležimo odgovarajuće stranice i postavimo odnos:

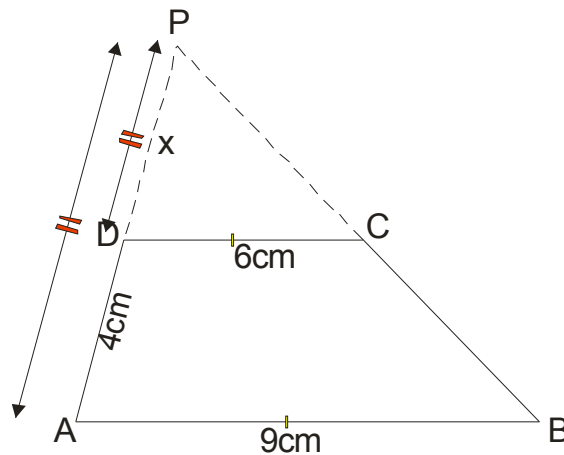
$$AE : EC = AB : DC = 6 : 4 \text{ ( i ako malo skratimo sa 2, dobijamo: )}$$

$$AE : EC = 3 : 2$$

279. Праве одређене крацима трапеза  $ABCD$  секу се у тачки  $P$ . Ако је  $AB = 9$  cm,  $CD = 6$  cm и  $AD = 4$  cm, одредити дужине дужи  $AP$  и  $DP$ .



Proučimo najpre sliku :



Троуглови  $ABP$  и  $DCP$  су слични јер имају једнаке углове.

Обележимо дужину  $DP$  са  $x$ , и обележимо која којој страници одговара са цртицама.

$$AB : DC = AP : DP$$

$$9 : 6 = (4 + x) : x$$

$$9 \cdot x = 6 \cdot (4 + x)$$

$$9 \cdot x = 24 + 6 \cdot x$$

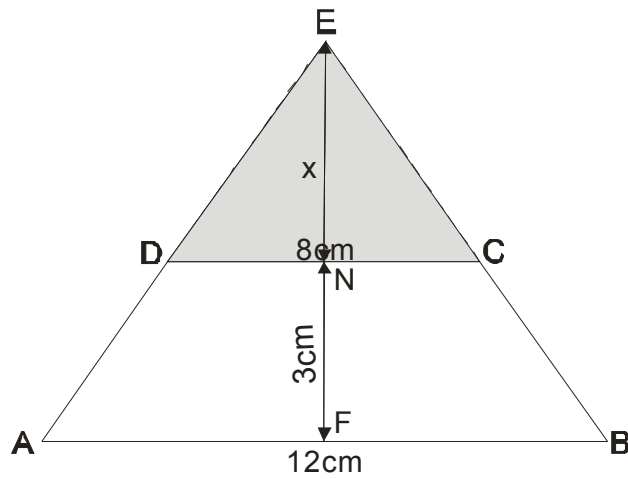
$$9 \cdot x - 6 \cdot x = 24$$

$$3x = 24$$

$$x = 8 \text{ cm}$$

Одавде је :  $DP = 8 \text{ cm}$  и  $AP = 8 + 4 = 12 \text{ cm}$

280. Основице једнакокраког трапеца  $ABCD$  су  $12\text{ cm}$  и  $8\text{ cm}$ , а његова висина  $3\text{ cm}$ . Ако се праве  $AD$  и  $BC$  секу у тачки  $E$ , одредити дужину висине  $EF$  троугла  $ABE$ .



Uočimo slične trouglove  $ABE$  i  $DCE$ , koji kao i u prethodnim zadacima imaju jednake uglove.

Uočimo visinu trougla  $ABE$  koja je očigledno  $EF = 3 + x$  i visinu trougla  $DCE$  koja je  $EN = x$ .

$$a : a_1 = h_a : h_{a_1}$$

$$12 : 8 = (3 + x) : x$$

$$12x = 8(3 + x)$$

$$12x = 24 + 8x$$

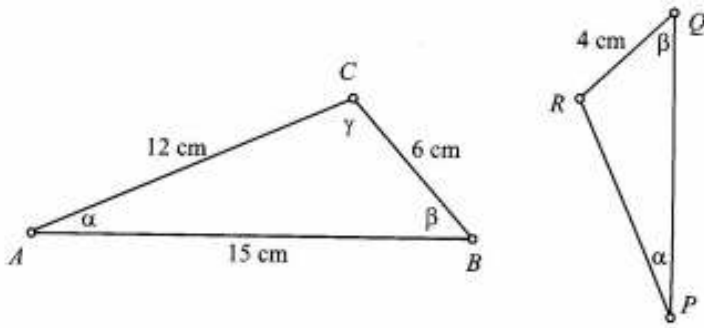
$$12x - 8x = 24$$

$$4x = 24$$

$$x = 6\text{ cm}$$

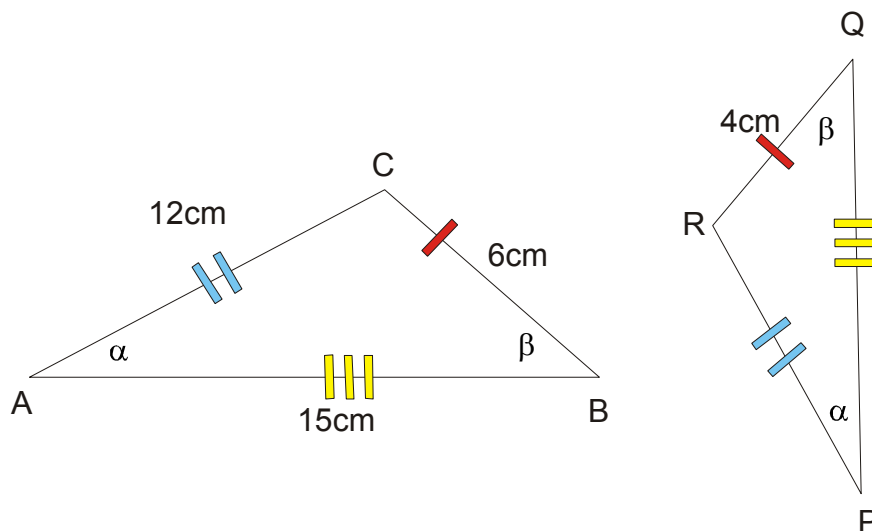
Dakle, visina trougla  $EF = 3 + x = 3 + 6 = 9\text{ cm}$

281.) На цртежу су дати подаци о троугловима  $ABC$  и  $PQR$ . Одредити дужине странице  $PQ$  и  $PR$  троугла  $PQR$ .



Kao i obično, prvo uočimo sličnost ova dva trougla. Oni imaju po dva jednaka ugla.

Dalje uočimo odgovarajuće stranice:



Kako imamo podatke za najmanje duži (sa po jednom crvenom crtikom) one će biti na početku proporcije...

$$BC : RQ = AC : PR$$

$$6 : 4 = 12 : PR$$

$$6 \cdot PR = 4 \cdot 12$$

$$PR = \frac{48}{6}$$

$$PR = 8 \text{ cm}$$

$$BC : RQ = AB : PQ$$

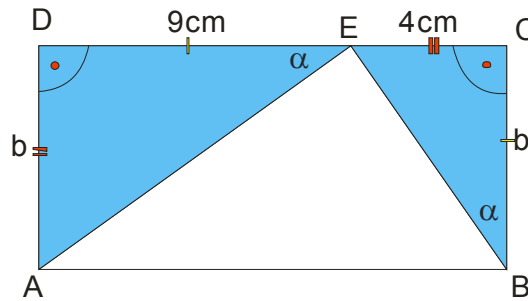
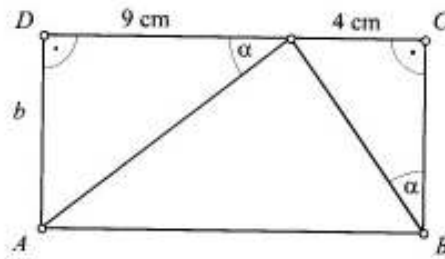
$$6 : 4 = 15 : PQ$$

$$6 \cdot PQ = 4 \cdot 15$$

$$PQ = \frac{60}{6}$$

$$PQ = 10 \text{ cm}$$

282. Нека је  $ABCD$  правоугаоник. Ако су подаци као на приложеном цртежу, одредити дужину странице  $b = AD$ .



$\triangle AED \sim \triangle BCE$  jer imaju po dva ista ugla ( ugao alfa i prav ugao)

Crtkama smo obeležili odgovarajuće stranice, postavljamo proporciju:

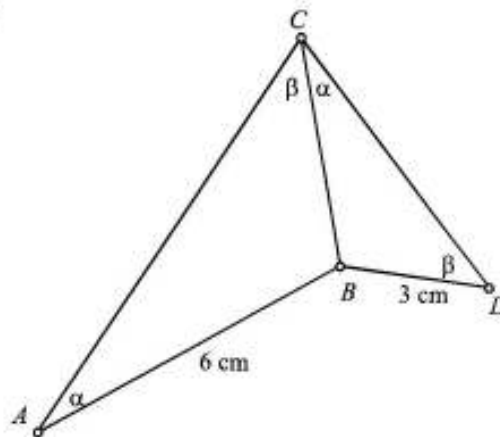
$$b : 4 = 9 : b$$

$$b^2 = 9 \cdot 4$$

$$b^2 = 36$$

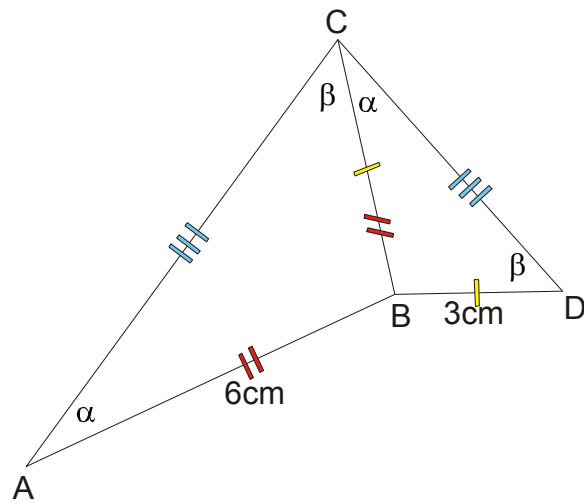
$$b = 6 \text{ cm}$$

283. Ако су ознаке и подаци као на приложеном цртежу, одредити дужину заједничке странице  $BC$  троуглова  $ABC$  и  $CBD$ .



$\triangle ABC \sim \triangle CBD$  jer imaju jednake uglove alfa i beta.





Uočimo dalje da nam stranice sa po tri crtice ( najduže) ne trebaju, jer nijedna od njih nema datu dužinu.

Moramo paziti jer je zajednička stranica BC istovremeno najkraća za trougao ABC i srednja po dužini za trougao BDC.

Dakle:

$$AB : BC = BC : BD$$

$$6 : BC = BC : 3$$

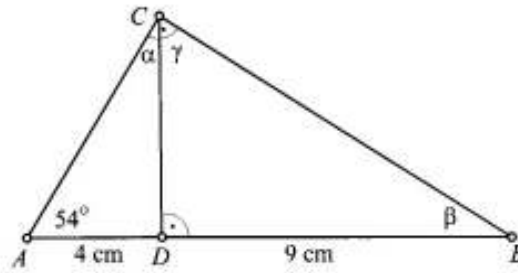
$$BC \cdot BC = 6 \cdot 3$$

$$|BC|^2 = 18$$

$$BC = \sqrt{18}$$

$$BC = \sqrt{9 \cdot 2} = 3\sqrt{2}$$

284. Троугао  $ABC$  је правоугли, са правим углом код темена  $C$ . Ако су подаци као на цртежу, одредити углове троуглова  $ADC$  и  $CDB$  и дужину висине  $CD$  троугла  $ABC$ .

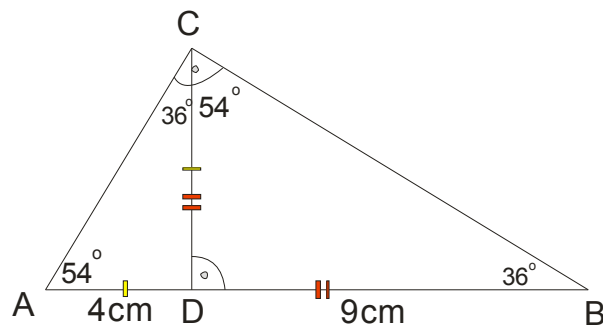


Najpre ćemo izračunati ugao  $\beta$ , jer je trougao  $ABC$  pravougli a znamo da je jedan ugao  $54$  stepeni.

$$\beta = 90^\circ - 54^\circ = 36^\circ$$

Kako je i trougao  $BDC$  pravougli to je  $\gamma = 90^\circ - 36^\circ = 54^\circ$

$ADC$  je takođe pravougli, pa je  $\alpha = 90^\circ - 54^\circ = 36^\circ$



Trouglovi  $ADC$  i  $BDC$  imaju jednake uglove, pa su slični.

$$AD : DC = DC : DB$$

$$4 : h = h : 9$$

$$h^2 = 9 \cdot 4$$

$$h^2 = 36$$

$$h = 6 \text{ cm}$$

285. Ако су катете правоуглог троугла  $a = 6 \text{ cm}$  и  $b = 8 \text{ cm}$ , одредити катете њему сличног троугла чија је хипотенуза  $c' = 30 \text{ cm}$ .

Применом Питагорине теореме ћемо наћи дужину хипотенузе првог троугла.

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$c^2 = 6^2 + 8^2$$

$$c^2 = 36 + 64$$

$$c^2 = 100$$

$$c = \sqrt{100}$$

$$c = 10 \text{ cm}$$

Како су троуглови слични, одговарајуће стране су пропорционалне:

$$a : a' = c : c'$$

$$b : b' = c : c'$$

$$6 : a' = 10 : 30$$

$$8 : b' = 10 : 30$$

$$10 \cdot a' = 30 \cdot 6$$

$$10 \cdot b' = 30 \cdot 8$$

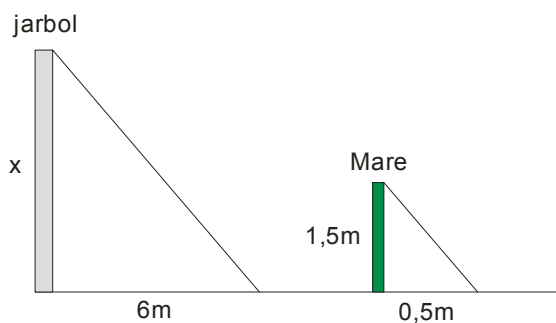
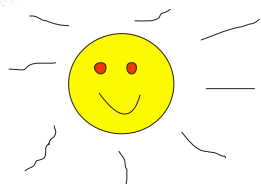
$$a' = \frac{30 \cdot 6}{10}$$

$$b' = \frac{30 \cdot 8}{10}$$

$$a' = 18 \text{ cm}$$

$$b' = 24 \text{ cm}$$

286. Марко је висок  $1,5 \text{ m}$  и стоји поред јарбола који је ортогоналан на водоравном плочнику. У једном тренутку, дужине сенки Марка и јарбола су  $0,5 \text{ m}$  и  $6 \text{ m}$ . Одредити висину тог јарбола.



Уočимо сличне троуглове и поставимо пропорцију:

$$x : 1,5 = 6 : 0,5$$

$$0,5 \cdot x = 6 \cdot 1,5$$

$$x = \frac{6 \cdot 1,5}{0,5}$$

$$x = 6 \cdot 3 \rightarrow x = 18 \text{ m}$$

287. Странице троугла  $ABC$  су  $a = 12$  cm,  $b = 18$  cm и  $c = 8$  cm. Одредити обим њему сличног троугла чија је најдужа страница 27 cm.

Ovde ćemo upotrebiti:

$$a : a_1 = b : b_1 = c : c_1 = O : O_1 = k$$

Najpre se pitamo : **koja je to stranica u sličnom trouglu data?**

**Pa pošto je b najduža stranica u prvom trouglu , to je  $b_1 = 27$  cm .**

Dalje računamo obim prvog trougla:

$$O = a + b + c$$

$$O = 12 + 18 + 8$$

$$O = 38 \text{ cm}$$

Sada koristimo deo ove velike proporcije koji nam treba:

$$b : b_1 = O : O_1$$

$$18 : 27 = 38 : O_1$$

$$18 \cdot O_1 = 27 \cdot 38$$

$$O_1 = \frac{27 \cdot 38}{18}$$

$$O_1 = 57 \text{ cm}$$

288. Странице троугла  $ABC$  су  $a = 18$  cm,  $b = 6$  cm и  $c = 21$  cm. Одредити странице њему сличног троугла чији је обим 30 cm.

*AB*

$$a : a_1 = b : b_1 = c : c_1 = O : O_1 = k$$

Najpre nađemo obim prvog trougla  $O = a + b + c \rightarrow O = 18 + 6 + 21 \rightarrow O = 45 \text{ cm}$

$$O : O_1 = k$$

$$45 : 30 = k$$

$$k = 1,5$$

$$a : a_1 = k$$

$$18 : a_1 = 1,5$$

$$a_1 = \frac{18}{1,5} = \frac{180}{15}$$

$$a_1 = 12 \text{ cm}$$

$$b : b_1 = k$$

$$6 : b_1 = 1,5$$

$$b_1 = \frac{6}{1,5} = \frac{60}{15}$$

$$b_1 = 4 \text{ cm}$$

$$c : c_1 = k$$

$$21 : c_1 = 1,5$$

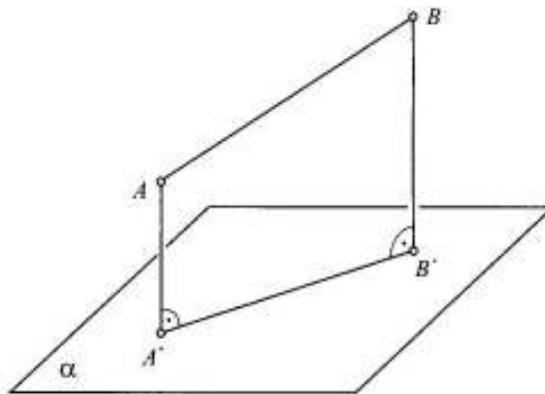
$$c_1 = \frac{21}{1,5} = \frac{210}{15}$$

$$c_1 = 14 \text{ cm}$$

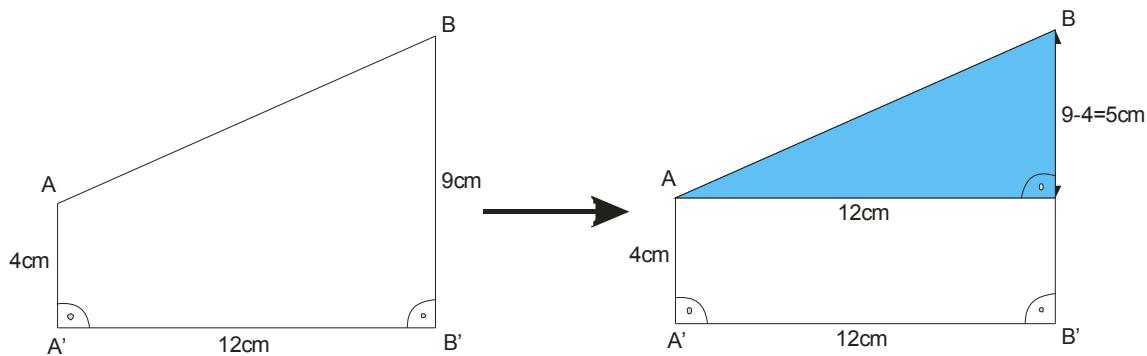
289. Тачке  $A$  и  $B$  су са исте стране равни  $\alpha$ .  
Ако су  $A'$  и  $B'$  ортогоналне пројекције  
тачака  $A$  и  $B$  на ту раван и

$$A'B' = 12 \text{ cm}, AA' = 4 \text{ cm}, BB' = 9 \text{ cm},$$

одредити дужину дужи  $AB$ .



Pošto nam je slika data u prostoru, mi ćemo je nacrtati u ravni i uočiti veze između podataka.



Osenčeni trougao je pravougli i tu primenjujemo Pitagorinu teoremu.

$$AB^2 = 12^2 + 5^2$$

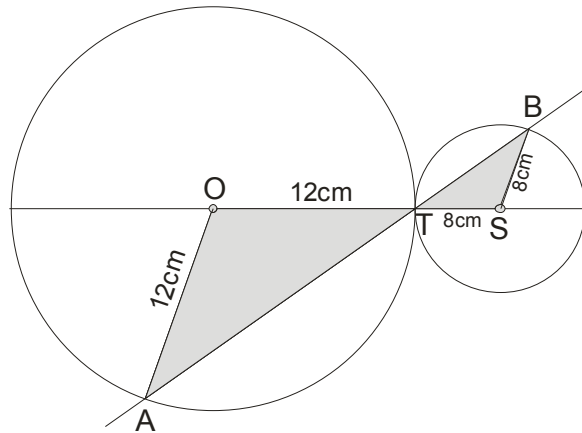
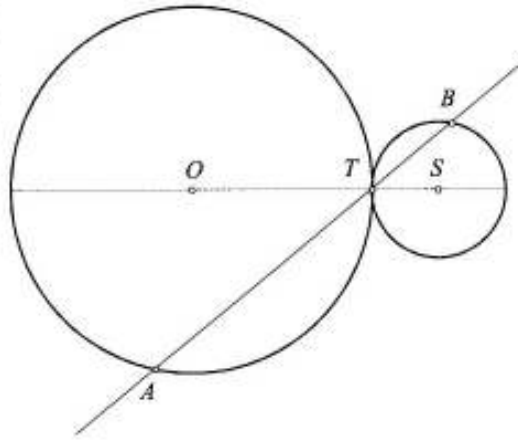
$$AB^2 = 144 + 25$$

$$AB^2 = 169$$

$$AB = \sqrt{169}$$

$$AB = 13 \text{ cm}$$

290. Кругови  $k(O, R)$  и  $k_1(S, r)$  се додирују споља у тачки  $T$ . Права која садржи тачку  $T$  сече те кругове у тачкама  $A$  и  $B$ . Ако је  $R = 12$  cm и  $r = 8$  cm, одредити размеру  $AT : TB$ .



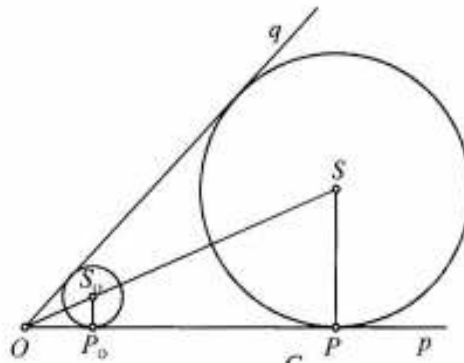
Uočimo trouglove  $OAT$  i  $BTS$ . Oni su jednakokraki i imaju jednake uglove. Dakle, slični su.

$$AT : TB = OT : TS$$

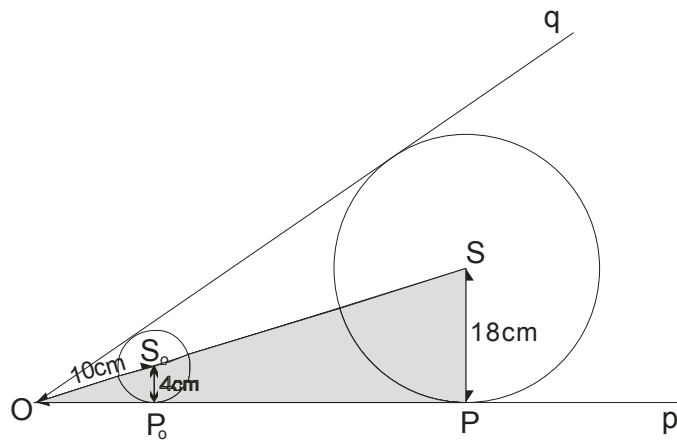
$$AT : TB = 12 : 8 \quad (\text{skratimo sa } 4)$$

$$AT : TB = 3 : 2$$

291. Два круга  $k_O$  и  $k$ , полупречника 4 cm и 18 cm, додирују оба крака угла  $Opq$ . Ако је тачка  $O$  удаљена од центра  $S_O$  круга  $k_O$  за 10 cm, колико је она удаљена од центра  $S$  круга  $k$ ?



292. Тачке  $A, B, C, D$  леже на једној правој линији.



$\triangle OSP \sim \triangle OS_0P_0$ , imaju jednake uglove.

$$SO : S_0O = PS : P_0S$$

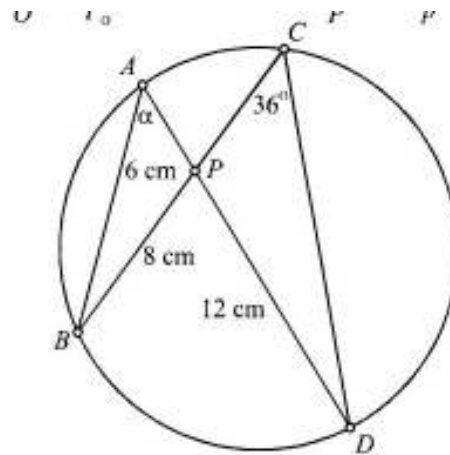
$$SO : 10 = 18 : 4$$

$$4 \cdot SO = 18 \cdot 10$$

$$SO = \frac{180}{4}$$

$$SO = 45 \text{ cm}$$

292. Тачке  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$  су на истом кругу  $k$ . Ако су ознаке и подаци као на цртежу и  $AB = 6 \text{ cm}$ ,  $BP = 8 \text{ cm}$  и  $DP = 12 \text{ cm}$ , одредити угао  $\alpha$  и дужину тетиве  $CD$ .



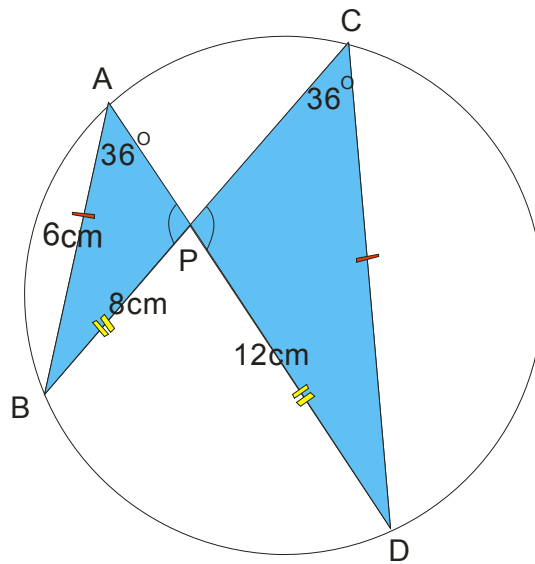
Najpre uočimo jednu nepravilnost kod ovog zadatka! Očigledno je  $AB$  duže od  $BP$  a na slici je  $AB=6\text{cm}$  a  $DP=8\text{cm}$ ?

Bilo kako bilo, mi ćemo zadatak rešiti primenom sličnosti.

Uglovi  $BAD$  i  $BCD$  su nad istim lukom  $BD$  pa moraju biti isti, dakle zaključimo da je  $\alpha = 36^\circ$ .

Uglovi  $BPA$  i  $DPA$  su unakrsni i jednaki .

Dakle trouglovi  $ABP$  i  $DPE$  su slični jer imaju po dva ista ugla.



$$DC : AB = DP : BP$$

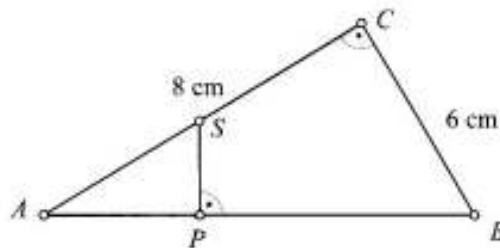
$$DC : 6 = 12 : 8$$

$$8 \cdot DC = 12 \cdot 6$$

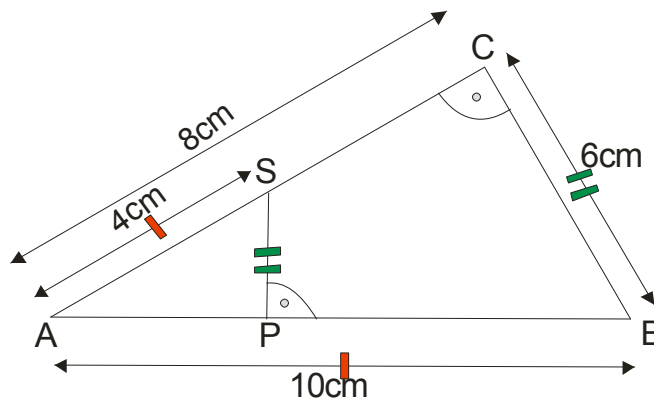
$$DC = \frac{72}{8}$$

$$DC = 9 \text{ cm}$$

293. Тачка  $S$  је средиште катете  $AC$  правоуглог троугла  $ABC$ . Ако је  $AC = 8$  cm и  $BC = 6$  cm, одредити дужину дужи  $SP$ .



Proučimo najpre sliku.



Trouglovi APS i ABC su slični jer imaju po dva ista ugla (jedan prav a ugao BAC im je zajednički)



$$AB : AS = CB : SP$$

$$10 : 4 = 6 : SP$$

$$10 \cdot SP = 4 \cdot 6$$

$$SP = \frac{24}{10}$$

$$SP = 2,4cm$$