

# 1. UČENIK UME DA REŠI LINEARNE JEDNAČINE I SISTEME LINEARNIH JEDNAČINA SA DVE NEPOZNATE

## LINEARNE JEDNAČINE

Pod linearnom jednačinom 'po  $x$ ' podrazumevamo svaku jednačinu sa nepoznatom  $x$  koja se ekvivalentnim transformacijama svodi na jednačinu oblika:

$$a \cdot x = b$$

gde su  $a$  i  $b$  dati realni brojevi.

**Rešenje** ove jednačine je svaki realan broj  $x_0$  za koji važi:

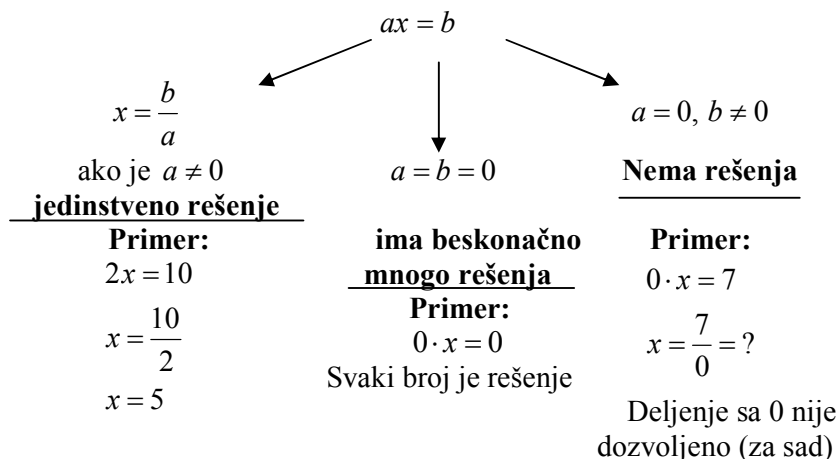
$$ax_0 = b$$

Ako nam posle rešavanja ostane jednačina većeg stepena (drugog, trećeg ...) onda nju probamo da rastavimo na činioce i koristimo:

$$A \cdot B = 0 \Leftrightarrow A = 0 \quad \text{ili} \quad B = 0$$

$$A \cdot B \cdot C = 0 \Leftrightarrow A = 0 \quad \text{ili} \quad B = 0 \quad \text{ili} \quad C = 0$$

Za svaku linearnu jednačinu važi:



### **Kako rešavati jednačinu?**

- Prvo se oslobodimo razlomaka (ako ih ima) tako što celu jednačinu pomnožimo sa NZS
- Onda se oslobodimo zagrada (ako ih ima) množeći "svaki sa svakim".
- Nepoznate prebacimo na jednu a poznate na drugu stranu znaka jednakosti (=).

**(PAZI: prilikom prelaska sa jedne na drugu stranu menja se znak)**

- "sredimo" obe strane (oduzmemo i saberemo) i dobijemo  $a \cdot x = b$
- Izrazimo nepoznatu  $x = \frac{b}{a}$

#### **Primer 1.**

**1. Rešiti jednačinu:  $9 - 2x = 5x + 2$**

#### **Rešenje:**

Nema razlomaka i zagrada tako da odmah 'prebacujemo' nepoznate na jednu a poznate na drugu stranu.

$$\begin{aligned}9 - 2x &= 5x + 2 \\ -2x - 5x &= +2 - 9 \\ -7x &= -7 \\ x &= \frac{-7}{-7} \\ x &= 1\end{aligned}$$

#### **Primer 2.**

**Rešiti jednačinu:  $3(2 - 3x) + 4(6x - 11) = 10 - x$**

#### **Rešenje:**

$$\begin{aligned}3(2 - 3x) + 4(6x - 11) &= 10 - x && \longleftrightarrow \text{ najpre se oslobodimo zagrada ( "svaki sa svakim" množimo)} \\ 6 - 9x + 24x - 44 &= 10 - x && \longleftrightarrow \text{ nepoznate na levu a poznate na desnu stranu prebacimo...} \\ -9x + 24x + x &= 10 - 6 + 44 && \swarrow \text{ "sredimo obe strane"} \\ 16x &= 48 && \swarrow \text{ izrazimo nepoznatu} \\ x &= \frac{48}{16} \\ x &= 3\end{aligned}$$

**Primer 3.**

2. **Rešiti jednačinu:**  $\frac{y-5}{7} + 2 = \frac{2y-3}{2} - \frac{6y+5}{14}$

**Rešenje:**

Ovde najpre moramo da se oslobodimo razlomaka a to ćemo uraditi tako što celu jednačinu pomnožimo sa najmanjim zajedničkim sadržaozem za 7, 2 i 14 a to je očigledno 14.

Kad niste sigurni koliki je NZS “napamet” nadjite ga “ na stranu”


7, 2, 14	2
7, 1, 7	7
1, 1	

$$\frac{y-5}{7} + \frac{2}{1} = \frac{2y-3}{2} - \frac{6y+5}{14} \dots\dots/*14$$

$$\overset{2}{\cancel{14}} \cdot \frac{y-5}{\cancel{7}} + 14 \cdot 2 = \overset{7}{\cancel{14}} \cdot \frac{2y-3}{\cancel{2}} - \overset{1}{\cancel{14}} \cdot \frac{6y+5}{\cancel{14}} \quad \text{ovo možete zapisati i kao}$$

$$\frac{y-5}{7} + \frac{2}{1} = \frac{2y-3}{2} - \frac{6y+5}{14} \quad \text{sve jedno je , kako vam je lakše.....}$$

$$2(y-5) + 28 = 7(2y-3) - 1(6y+5) \quad \text{Pazi : upiši i 1 zbog zagrade}$$



$$2y - 10 + 28 = 14y - 21 - 6y - 5$$

$$2y - 14y + 6y = -21 - 5 + 10 - 28$$

$$-6y = -44$$

$$y = \frac{-44}{-6}$$

$$y = +\frac{22}{3}$$

## SISTEMI JEDNAČINA

Pod sistemom od dve linearne jednačine sa **dve nepoznate**  $x$  i  $y$  podrazumevamo:

$$a_1x + b_1y = c_1$$

$$a_2x + b_2y = c_2$$

Ovo je takozvani "**prost**" sistem do koga uvek možemo doći ekvivalentnim transformacijama, koje su da vas podsetimo:

- Prvo se oslobodimo razlomaka (ako ih ima) tako što celu jednačinu pomnožimo sa NZS
- Onda se oslobodimo zagrada (ako ih ima) množeći „svaki sa svakim”.
- Nepoznate prebacimo na jednu a poznate na drugu stranu znaka jednakosti (=).

**(PAZI: prilikom prelaska sa jedne na drugu stranu menja se znak)**

- Sredimo obe strane (saberemo i oduzmemo šta ima)

Ovde su  $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$  dati realni brojevi (ponekad mogu biti i parametri).

Rešenje sistema je uređeni par brojeva  $(x_0, y_0)$  za koji važi da je:

$$a_1x_0 + b_1y_0 = c_1$$

$$a_2x_0 + b_2y_0 = c_2$$

Sisteme možemo rešiti pomoću više metoda: zamena, suprotni koeficijenti, grafička metoda, itd.

Nama je najvažnije da tačno rešimo dati zadatak (problem) pa ćemo to i probati da vas naučimo.

Napomenimo samo da dati sistem može imati: jedinstveno rešenje, beskonačno mnogo rešenja ili pak da nema rešenja.

Najpre ćemo proučiti metodu **SUPROTNIH KOEFICIJENATA**.

**Ideja je da množenjem jedne (ili obe) jednačine odgovarajućim brojem napravimo da ispred  $x$  ili  $y$  budu isti brojevi a suprotnog znaka. Onda te dve jednačine saberemo i oslobodili smo se od jedne nepoznate!**

**Izračunamo drugu nepoznatu i vratimo se u bilo koju od jednačina iz prostog sistema.**

**Pogledajmo nekoliko primera:**

1. Reši sistem jednačina:  $2x + 3y = 7$   
 $3x - 6y = 7$

Rešenje:

$\begin{array}{r} 2x + 3y = 7 \cdot 2 \\ 3x - 6y = 7 \\ \hline 4x + 6y = 14 \\ + \quad \left\{ \begin{array}{l} 4x + 6y = 14 \\ 3x - 6y = 7 \end{array} \right. \\ \hline 7x = 21 \\ x = \frac{21}{7} \\ x = 3 \end{array}$	<p>Najlakše je da ispod x (ili y) napravimo da budu isti brojevi a suprotnog znaka, pa onda te dve jednačine saberemo. Zato ćemo prvu jednačinu pomnožiti sa 2.</p> <p>Kad nadjemo jedno rešenje, vratimo se u jednu od jednačina iz prostog sistema (bilo koju) da nadjemo drugo rešenje</p>
---	---

$$\begin{aligned} 2x + y &= 7 \\ 2 \cdot 3 + 3y &= 7 \\ 6 + 3y &= 7 \\ 3y &= 7 - 6 \\ 3y &= 1 \\ y &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Ovde je rešenje jedinstveno:  $(x, y) = \left(3, \frac{1}{3}\right)$

2. Reši sistem jednačina:  $5x + y = -1$   
 $-10x - 2y = 2$

Rešenje:

$\begin{array}{r} 5x + y = -1 \dots \dots \dots / *2 \\ -10x - 2y = 2 \\ \hline 10x + 2y = -2 \\ -10x - 2y = 2 \\ \hline 0 = 0 \end{array}$	<p>Pomnožimo prvu jednačinu sa 2</p> <p><b>Ovde imamo situaciju da su se svi "skratili"!</b></p>
---	--

To nam govori da sistem ima beskonačno mnogo rešenja. Da bi "opisali" ta rešenja iz jedne od jednačina izrazimo x (ili y), naravno, šta nam je lakše:

$$\begin{aligned} 5x + y &= -1 \\ y &= -1 - 5x \end{aligned}$$

Sada su rešenja:  $(x, y) = (x, -1 - 5x)$       $x \in R$

3. Reši sistem jednačina:  $2x + 3y = 4$   
 $-2x - 3y = 5$

Rešenje:

$$\begin{array}{r} 2x + 3y = 4 \\ -2x - 3y = 5 \\ \hline 0 = 9 \end{array} \quad \text{Saberemo ih odmah.}$$

U ovoj situaciji kažemo da je sistem nemoguć, odnosno nema rešenja!

4. Reši sistem jednačina:  $\frac{5x-1}{6} + \frac{3y-1}{10} = 3$

$$\frac{11-x}{6} + \frac{11+y}{4} = 3$$

Rešenje:

$$\frac{5x-1}{6} + \frac{3y-1}{10} = 3 \dots \cdot 30 \quad \text{Odmah uočimo da ovaj sistem nije "prost", pa}$$

$$\frac{11-x}{6} + \frac{11+y}{4} = 3 \dots \cdot 12 \quad \text{moramo najpre da "napravimo" da bude.}$$

$$5(5x-1) + 3(3y-1) = 90$$

$$2(11-x) + 3(11+y) = 36$$

$$25x - 5 + 9y - 3 = 90$$

$$22 - 2x + 33 + 3y = 36$$

$$25x + 9y = 90 + 5 + 3$$

$$-2x + 3y = 36 - 22 - 33$$

$$25x + 9y = 98$$

$$-2x + 3y = -19 \cdot (-3)$$

Napravili smo "prost" sistem. Drugu jednačinu

množimo sa (-3).

$$\left. \begin{array}{l} 25x + 9y = 98 \\ 6x - 9y = 57 \end{array} \right\} +$$

$$31x = 155$$

Vratimo se sad u jednačinu iz prostog sistema...

$$x = 5$$

$$-2x + 3y = -19$$

$$-10 + 3y = -19$$

$$-2 \cdot 5 + 3y = -19$$

$$3y = -19 + 10$$

$$3y = -9$$

$$y = -3$$

$$\text{dakle: } (x, y) = (5, -3)$$

Primitili ste da rešenje (kada ga ima) moramo zapisati kao UREDJENI PAR, dakle  $(x_0, y_0)$ .

Vodite računa o ovome!

Druga metoda koju ćemo proučiti je **METODA ZAMENE**. (Naravno, prvo moramo napraviti prost sistem)

**Ovde je ideja da iz jedne od jednačina izrazimo x ili y i to zamenimo u drugu jednačinu!**

**Najbolje je da uočite nepoznatu ispred koje nema broj (odnosno da je 1) i da nju izrazite jer tako sebi olakšavate rešavanje.**

**Primeri:**

1. **Reši sistem jednačina :**

$$4x - 3y = 8$$

$$x + 2y = 13$$

**Rešenje:**

Posmatrajmo dati sistem. Prvo primećujemo da je prost, pa odmah možemo krenuti na rešavanje.

U prvoj jednačini imamo brojeve ispred obe nepoznate, pa bi nam izražavanje odatle zakomplikovalo situaciju.

U drugoj jednačini ispred x nema broja! Dakle, najbolje je izraziti x iz druge jednačine!

$$4x - 3y = 8$$

$$x + 2y = 13 \rightarrow \boxed{x = 13 - 2y}$$

$$x = 13 - 2y$$

$$4(13 - 2y) - 3y = 8$$

$$x = 13 - 2y$$

$$52 - 8y - 3y = 8$$

$$x = 13 - 2y$$

$$\underline{-8y - 3y = 8 - 52}$$

$$x = 13 - 2y$$

$$\underline{-11y = -44}$$

$$x = 13 - 2y$$

$$\boxed{y = 4}$$

Dobili smo vrednost za jednu nepoznatu. Vratimo se u  $x = 13 - 2y$  da nadujemo x.

$$x = 13 - 2y$$

$$\boxed{y = 4}$$

$$x = 13 - 2 \cdot 4$$

$$\underline{y = 4}$$

$$x = 5$$

$$y = 4$$

Dakle, rešenje sistema je  $(x, y) = (5, 4)$

[www.matematiranje.in.rs](http://www.matematiranje.in.rs)