HOMOGENE DIFERENCIJALNE JEDNAČINE

Jednačina oblika $M(x,y)dx + N(x,y) = 0$ **koju možemo da spakujemo u oblik** $y` = f\left(\frac{y}{x}\right)$ **naziva se homogena diferencijalna jednačina.**

Rešavamo je smenom :

$\frac{y}{x} = z$ to jest $y = z \cdot x$

Odavde je:

$$y = z \cdot x$$
$$y` = z` \cdot x + x` \cdot z$$
$$y` = z` \cdot x + 1 \cdot z$$
$$\boxed{y` = z` \cdot x + z}$$

Posle smene ova jednačina se svodi na diferencijalnu jednačinu koja razdvaja promenljive.

Da Vas ne zbuni , neki profesori ne uzimaju za smenu slovo *z*, već slovo *u*.

$\frac{y}{x} = u$ to jest $y = u \cdot x$

Odavde je:

$$y = u \cdot x$$
$$y` = u` \cdot x + x` \cdot u$$
$$y` = u` \cdot x + 1 \cdot u$$
$$\boxed{y` = u` \cdot x + u}$$

Sve jedno je koje ćemo slovo uzeti za smenu, postupak rada je isti.....

Primer 1. Rešiti diferencijalnu jednačinu $y` = \frac{2x+y}{2x}$

Rešenje:

$y` = \frac{2x+y}{2x}$ izvučemo gore x ispred zagrade

$$y` = \frac{\cancel{x}(2+\frac{y}{x})}{2\cancel{x}}$$

$y` = \frac{2+\frac{y}{x}}{2}$ Napravili smo oblik homogene d.j. pa sad uzimamo smenu

Smena: $\frac{y}{x} = z \Rightarrow y = zx \Rightarrow y` = z`x + z$, vraćamo se u zadatak

$$z`x + z = \frac{2+z}{2}$$

$$z`x=\frac{2+z}{2}-z$$

$$z`x=\frac{2+z-2z}{2}$$

$z`x=\frac{2-z}{2}$ ovo je diferencijalna jednačina koja razdvaja promenljive , gde je $\boxed{z`=\frac{dz}{dx}}$

$$\frac{dz}{dx}x=\frac{2-z}{2}$$

$\frac{dz}{2-z}=\frac{1}{2}\frac{dx}{x}$ integralimo

$$\int\frac{dz}{2-z}=\int\frac{1}{2}\frac{dx}{x}$$

$-\ln|2-z|=\frac{1}{2}\ln|x|+\ln c$ "trik" je da kada su sva rešenja po ln da se doda *lnc* umesto *c*

$\ln|2-z|^{-1}=\ln|x|^{\frac{1}{2}}+\ln c$ spakujemo malo

$\ln|2-z|^{-1}=\ln|x|^{\frac{1}{2}}c$ antilogaritmujemo

$$|2-z|^{-1}=|x|^{\frac{1}{2}}c$$

$\frac{1}{2-z}=\sqrt{x}c$ vratimo smenu $\frac{y}{x}=z$

$\frac{1}{2-\frac{y}{x}}=\sqrt{x}c$ **ovo je opšte rešenje, ako zahteva vaš profesor odavde izrazite *y***

$$2-\frac{y}{x}=\frac{1}{c\sqrt{x}}$$

$$\frac{y}{x}=2-\frac{1}{c\sqrt{x}}........................../*x$$

$$y=2x-\frac{x}{c\sqrt{x}}$$

$y=2x-\frac{\sqrt{x}}{c}$ ako stavimo $\frac{1}{c}=C$

$$y=2x-C\sqrt{x}$$

Primer 2. Rešiti diferencijalnu jednačinu $xy`-y=\sqrt{x^2+y^2}$

Rešenje:

$$xy`-y=\sqrt{x^2+y^2}$$
$$xy`=\sqrt{x^2+y^2}+y$$
$$xy`=\sqrt{x^2(1+\frac{y^2}{x^2})}+y$$
$$xy`=x\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}+y............................/:x \qquad (\mathrm{x}\neq 0)$$
$$y`=\frac{\cancel{x}\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}}{\cancel{x}}+\frac{y}{x}$$
$$y`=\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}+\frac{y}{x}$$

Napakovali smo oblik koji nam treba, uvodimo smenu : $\frac{y}{x}=z \Rightarrow y=zx \Rightarrow y`=z`x+z$

$$y`=\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}+\frac{y}{x}$$
$$z`x+z=\sqrt{1+z^2}+z$$
$$z`x=\sqrt{1+z^2} \rightarrow \text{d.j. koja razdvaja promenljive}$$
$$\frac{dz}{dx}\cdot x=\sqrt{1+z^2}$$
$$\frac{dz}{\sqrt{1+z^2}}=\frac{dx}{x} \rightarrow \text{integralimo}$$
$$\int\frac{dz}{\sqrt{1+z^2}}=\int\frac{dx}{x}$$
$$\ln\left(z+\sqrt{1+z^2}\right)=\ln x+\ln c$$
$$\ln\left(z+\sqrt{1+z^2}\right)=\ln x\cdot c$$
$$z+\sqrt{1+z^2}=xc \rightarrow \text{vratimo smenu}$$
$$\boxed{\frac{y}{x}=\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}=xc} \rightarrow \text{ako malo prisredimo} \rightarrow \frac{y}{x}=\sqrt{\frac{x^2+y^2}{x^2}}=xc \rightarrow \frac{y}{x}=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}=xc......./*x$$
$$\boxed{y+\sqrt{x^2+y^2}=x^2c}$$

Primer 3. Rešiti diferencijalnu jednačinu $xy^2dy = (x^3 + y^3)dx$

Rešenje: $xy^2dy = (x^3 + y^3)dx$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^3 + y^3}{xy^2}$$ gore izvlačimo x^3

$$y` = \frac{x^3(1+\frac{y^3}{x^3})}{xy^2} \rightarrow y` = \frac{x^{\cancel{3}}(1+\frac{y^3}{x^3})}{\cancel{x}y^2}$$

$$y` = \frac{x^2(1+\frac{y^3}{x^3})}{y^2}$$ spustimo x^2 dole ispod y^2

$$y` = \frac{(1+\frac{y^3}{x^3})}{\frac{y^2}{x^2}}$$

$$y` = \frac{1+(\frac{y}{x})^3}{(\frac{y}{x})^2}$$ jasno je da je ovo homogena d.j.

Uzimamo smenu : $\frac{y}{x} = z \Rightarrow y = zx \Rightarrow y` = z`x + z$

$$z`x + z = \frac{1+z^3}{z^2}$$

$$z`x = \frac{1+z^3}{z^2} - z$$

$$z`x = \frac{1+z^3-z^3}{z^2}$$

$$z`x = \frac{1}{z^2}$$ razdvaja promenljive $z` = \frac{dz}{dx}$

$$\frac{dz}{dx}x = \frac{1}{z^2}$$

$$z^2dz = \frac{dx}{x}$$

$$\int z^2dz = \int \frac{dx}{x}$$

$\frac{z^3}{3} = \ln|x| + c$ vratimo smenu $\frac{y}{x} = z$ pa je $\frac{(\frac{y}{x})^3}{3} = \ln|x| + c$ opšte rešenje

Primer 4. Rešiti diferencijalnu jednačinu $xy`-y=(x+y)\ln\frac{x+y}{x}$

Rešenje:

$$xy`-y=(x+y)\ln\frac{x+y}{x}$$
$$xy`=(x+y)\ln\left(\frac{x}{x}+\frac{y}{x}\right)+y$$
$$xy`=(x+y)\ln\left(1+\frac{y}{x}\right)+y\text{.............................}/:x \qquad (\mathrm{x}\neq 0)$$
$$y`=\frac{(x+y)}{x}\ln\left(1+\frac{y}{x}\right)+\frac{y}{x}$$
$$y`=\left(1+\frac{y}{x}\right)\ln\left(1+\frac{y}{x}\right)+\frac{y}{x}$$

Sad smena: $\frac{y}{x}=z\Rightarrow y=zx\Rightarrow y`=z`x+z$

$$y`=\left(1+\frac{y}{x}\right)\ln\left(1+\frac{y}{x}\right)+\frac{y}{x}$$
$$z`x+z=(1+z)\ln(1+z)+z$$
$$z`x=(1+z)\ln(1+z)$$
$$\frac{dz}{dx}x=(1+z)\ln(1+z)$$
$$\frac{dz}{(1+z)\ln(1+z)}=\frac{dx}{x}$$
$$\int\frac{dz}{(1+z)\ln(1+z)}=\int\frac{dx}{x}$$

“Rešimo” na stranu integral sa leve strane: $\int\frac{dz}{(1+z)\ln(1+z)}=\begin{vmatrix}\ln(1+z)=t\\ \frac{1}{1+z}dz=dt\end{vmatrix}=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|=\ln|\ln(1+z)|$

$$\ln|\ln(1+z)|=\ln x+\ln c$$
$$\ln|\ln(1+z)|=\ln xc$$
$$\ln(1+z)=xc$$
$$1+z=e^{xc}$$
$$z=e^{xc}-1$$
$$\frac{y}{x}=e^{xc}-1$$
$$\boxed{y=x\left(e^{cx}-1\right)}$$

Primer 5. Rešiti diferencijalnu jednačinu $y` = \frac{x-y+1}{x+y-3}$

Rešenje:

Evo ovde malog problema! Smetaju nam ovi brojevi gore i dole.

Kako rešavamo ovu situaciju?

Jednačina oblika $y` = f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$ **svodi se na homogenu prenošenjem koordinatnog početka u tačku preseka pravih** $a_1x+b_1y+c_1=0 \wedge a_2x+b_2y+c_2=0$ **.**

Ustvari, mi rešimo sistem od ove dve jednačine , i dobijemo rešenja $(x,y)=(\alpha,\beta)$

Uvodimo smene: $\begin{matrix} x = X+\alpha \\ y = Y+\beta \end{matrix}$ **i dobijemo poznatu homogenu diferencijalnu jednačinu.**

Ako se desi da se prave ne seku , onda je $a_1x+b_1y=k(a_2x+b_2y)$ **pa diferencijalna jednačina ima oblik**

$y` = F(ax+by)$ **koji se smenom** $z=ax+by$ **ili** $z=ax+by+c$ **svodi na diferencijalnu jednačinu koja razdvaja promenljive.**

Da se vratimo na naš primer:

$$y` = \frac{x-y+1}{x+y-3}$$

$$\left.\begin{matrix} x-y+1=0 \\ \underline{x+y-3=0} \end{matrix}\right\} +$$

$$2x-2=0 \rightarrow x=1$$

$$x-y+1=0 \rightarrow 1-y+1=0 \rightarrow y=2$$

$$(\alpha,\beta)=(1,2)$$

$$smena$$

$$x=X+1$$

$$y=Y+2$$

$$y` = \frac{x-y+1}{x+y-3} \rightarrow Y` = \frac{X+1-Y-2+1}{X+1+Y+2-3} \rightarrow \boxed{Y` = \frac{X-Y}{X+Y}}$$

Sad je ovo obična homogena d.j.

Samo da je upakujemo!

$$Y` = \frac{X-Y}{X+Y}$$

$$Y` = \frac{X(1-\frac{Y}{X})}{X(1+\frac{Y}{X})}$$

$$Y` = \frac{1-\frac{Y}{X}}{1+\frac{Y}{X}} \to \text{Smena:} \frac{Y}{X} = Z \to \quad Y` = Z`X + Z$$

$$Z`X + Z = \frac{1-Z}{1+Z}$$

$$Z`X = \frac{1-Z}{1+Z} - Z$$

$$Z`X = \frac{1-Z-Z-Z^2}{1+Z}$$

$$Z`X = \frac{1-2Z-Z^2}{1+Z}$$

$$\frac{dZ}{dX} = \frac{1-2Z-Z^2}{1+Z} \to \frac{1+Z}{1-2Z-Z^2} dZ = dX$$

$$\frac{1+Z}{1-2Z-Z^2} dZ = dX$$

$$\int \frac{1+Z}{1-2Z-Z^2} dZ = \int dX$$

$$\int \frac{1+Z}{1-2Z-Z^2} dZ = -\int \frac{Z+1}{Z^2+2Z-1} dZ = \left| \begin{array}{l} Z^2+2Z-1=t \\ (2Z+2)dZ = dt \\ 2(Z+1)dZ = dt \\ (Z+1)dZ = \frac{dt}{2} \end{array} \right| = -\frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = -\frac{1}{2}\ln|t| = -\frac{1}{2}\ln\left|Z^2+2Z-1\right|$$

$$-\frac{1}{2}\ln\left|Z^2+2Z-1\right| = \ln|X| + \ln c \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots / *(-2)$$

$$\ln\left|Z^2+2Z-1\right| = -2\ln|X| + (-2\ln c)$$

$$\ln\left|Z^2+2Z-1\right| = -\ln|X|^2 + \ln c^{-2}$$

$$\ln\left|Z^2+2Z-1\right| + \ln|X|^2 = \ln c^{-2}$$

$$\ln\left|Z^2+2Z-1\right| \cdot |X|^2 = \ln c^{-2}$$

$$\left(Z^2+2Z-1\right) \cdot X^2 = c^{-2} \to \text{stavimo da je } c^{-2} = C$$

$$\left(Z^2+2Z-1\right) \cdot X^2 = C$$

$$\left(\frac{Y^2}{X^2} + 2\frac{Y}{X} - 1\right) \cdot X^2 = C$$

$$\left(\frac{Y^2+2XY-X^2}{X^2}\right) \cdot X^2 = C$$

$$\boxed{Y^2+2XY-X^2 = C}$$

Sad još imamo posao da vratimo smene sa početka zadatka:

$Y^2 + 2XY - X^2 = C$

smena

$x = X + 1 \to X = x - 1$

$y = Y + 2 \to Y = y - 2$

$$\boxed{(y-2)^2 + 2(x-1)(y-2) - (x-1)^2 = C}$$

Evo opšteg rešenja.

www.matematiranje.in.rs