BERNULIJEVA DIFERENCIJALNA JEDNAČINA

Bernulijeva diferencijalna jednačina je oblika: $y`+p(x)y=q(x)\cdot y^n$

Ona dakle liči na linearnu diferencijalnu jednačinu samo ima y^n **:** $y`+p(x)y=q(x)\cdot \boxed{y^n}$

Da bi Bernulijevu d.j. sveli na linearnu d.j. uzimamo smenu: $\boxed{u=y^{1-n}}$

Odavde je :

$u=y^{1-n}$.........nadjemo izvod

$u`=(1-n)y^{1-n-1}\cdot y`$

$u`=(1-n)y^{-n}\cdot y`$

$u`=(1-n)\cdot\frac{y`}{y^n}$

$\boxed{\frac{y`}{y^n}=\frac{u`}{1-n}}\to$ zapamti !

$y`+p(x)y=q(x)\cdot y^n$ uvek podelimo sa y^n

$\frac{y`}{y^n}+p(x)\frac{y}{y^n}=q(x)$

$\frac{y`}{y^n}+p(x)y^{1-n}=q(x)$

$\underbrace{\boxed{\frac{y`}{y^n}}}_{\text{Ovo je } \frac{u`}{1-n}}+p(x)\underbrace{\boxed{y^{1-n}}}_{\text{Ovo je } u}=q(x)$

$\frac{u`}{1-n}+p(x)\cdot u=q(x)$....................../ $*(1-n)$

$\boxed{u`+(1-n)p(x)\cdot u=(1-n)q(x)}$

Dobili smo linearnu d.j.

Rešimo je: $u(x)=e^{-\int p(x)dx}(c+\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx)$ i posle vratimo smenu: $u=y^{1-n}$

Primer 1. Reši diferencijalnu jednačinu $xy`+y=y^2\ln x$

Rešenje:

Najpre napravimo oblik:

$$xy`+y=y^2\ln x..............\,/:x$$
$$y`+\frac{1}{x}y=\frac{\ln x}{x}y^{\boxed{2}}\rightarrow\boxed{n=2}$$

Uočimo da je ***n = 2***

$$y^{1-n}=u$$
$$y^{1-2}=u$$
$$y^{-1}=u.........izvod\rightarrow\frac{1}{y}=u$$
$$-1y^{-1-1}\cdot y`=u`$$
$$-y^{-2}\cdot y`=u`$$
$$-\frac{y`}{y^2}=u`$$

Vratimo se u jednačinu:

$$y`+\frac{1}{x}y=\frac{\ln x}{x}y^2.....................\,/:y^2$$
$$\frac{y`}{y^2}+\frac{1}{x}\frac{y}{y^2}=\frac{\ln x}{x}$$
$$\frac{y`}{y^2}+\frac{1}{x}\frac{1}{y}=\frac{\ln x}{x}\rightarrow -u`+\frac{1}{x}u=\frac{\ln x}{x}$$
$$-u`+\frac{1}{x}u=\frac{\ln x}{x}............\,/*(-1)$$
$$u`-\frac{1}{x}u=-\frac{\ln x}{x}$$

Dobili smo linearnu jednačinu po *u(x).*

E sad, ako vaš profesor dozvoljava, možete da izbegnete ovo pakovanje....

Teoretski smo izveli da je posle smene $u`+(1-n)p(x)\cdot u=(1-n)q(x)$

Uporedimo $y`+\underbrace{\boxed{\frac{1}{x}}}_{p(x)}y=\underbrace{\boxed{\frac{\ln x}{x}}}_{q(x)}y^{\boxed{2}}$ **, vidimo da je *n = 2* , *ubacimo u*** $u`+(1-n)p(x)\cdot u=(1-n)q(x)$ **i dobijamo:**

$$u`+(1-2)\frac{1}{x}\cdot u=(1-2)\frac{\ln x}{x}$$
$$u`-\frac{1}{x}\cdot u=-\frac{\ln x}{x}$$

A to je isto kao kad smo pakovali, samo nema mučenje.....

Rešavamo linearnu d.j.

$$u` - \frac{1}{x} \cdot u = -\frac{\ln x}{x}$$

$$p(x) = -\frac{1}{x} \wedge q(x) = -\frac{\ln x}{x}$$

$\int p(x)dx = -\int \frac{1}{x} dx = -\ln|x| = \boxed{\ln x^{-1}}$ $\rightarrow$ Ovo nam treba zbog narednog integrala

$$\int q(x)e^{\int p(x)dx} = \int \left(-\frac{\ln x}{x}\right) e^{\ln x^{-1}} dx = -\int \frac{\ln x}{x} \cdot x^{-1} dx = -\int \frac{\ln x}{x} \cdot \frac{1}{x} dx = -\int \frac{\ln x}{x^2} dx$$

Rešimo na stranu ovaj integral:

$$-\int \frac{\ln x}{x^2} dx = \left| \begin{matrix} \ln x = u & \int \frac{1}{x^2} dx = dv \\ \frac{1}{x} dx = du & -\frac{1}{x} = v \end{matrix} \right| = -\left(-\frac{1}{x} \ln x - \int \left(-\frac{1}{x}\right) \frac{1}{x} dx \right) = -\left(-\frac{1}{x} \ln x + \int \left(\frac{1}{x^2}\right) dx \right) =$$

$$= \frac{1}{x} \ln x - \int \left(\frac{1}{x^2}\right) dx = \boxed{\frac{1}{x} \ln x + \frac{1}{x}}$$

Vratimo se u rešenje linearne d.j.

$$u(x) = e^{-\int p(x)dx} (c + \int q(x)e^{\int p(x)dx} dx)$$

$$u(x) = e^{-(-\ln x)} (c + \frac{1}{x} \ln x + \frac{1}{x})$$

$$u(x) = x(c + \frac{1}{x} \ln x + \frac{1}{x})$$

$$u(x) = xc + \ln x + 1$$

Vratimo smenu: $u(x) = \frac{1}{y}$

$$\frac{1}{y} = xc + \ln x + 1$$

$$\boxed{y = \frac{1}{xc + \ln x + 1}}$$

Ovo je opšte rešenje.

Primer 2. Reši diferencijalnu jednačinu $y`+2xy=2x^3y^3$

Rešenje:

$y`+2xy=2x^3y^{\boxed{3}}$ odavde vidimo da je n = 3

$$y^{1-n}=u$$
$$y^{1-3}=u$$
$$y^{-2}=u.........izvod$$
$$-2y^{-2-1}\cdot y`=u`$$
$$-2y^{-3}\cdot y`=u`$$
$$-2\frac{y`}{y^3}=u`$$

Sad ovde malo zastanemo:

$$y`+2xy=2x^3y^3.........../:y^3$$
$$\frac{y`}{y^3}+\frac{2xy}{y^3}=2x^3$$
$$\frac{y`}{y^3}+\frac{2x}{y^2}=2x^3$$

Smena je $y^{-2}=u\to\boxed{u=\frac{1}{y^2}}$

$-2\frac{y`}{y^3}=u`\to\boxed{\frac{y`}{y^3}=\frac{u`}{-2}}$

$$\frac{y`}{y^3}+\frac{2x}{y^2}=2x^3$$
$$\frac{u`}{-2}+2xu=2x^3................./*(-2)$$
$$\boxed{u`-4xu=-4x^3}$$

Ovo je linearna d.j.

$$p(x)=-4x$$
$$q(x)=-4x^3$$
$$u(x)=e^{-\int p(x)dx}(c+\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx)$$
$$\int p(x)dx=\int(-4x)dx=-4\frac{x^2}{2}=-2x^2$$

$\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx=\int(-4x^3)e^{-2x^2}dx=-4\int x^2e^{-2x^2}\cdot xdx=$ (Trik je napisati $x^3=x^2\cdot x$, zbog smene)=

$$\left|\begin{array}{l}-2x^2=t\to x^2=\frac{t}{-2}\\ -4xdx=dt\\ xdx=\frac{dt}{-4}\end{array}\right|=-4\int\frac{t}{-2}e^t\frac{dt}{-4}=-\frac{1}{2}\int te^tdt=\text{Sad parcijalna integracija}=$$

$$\left|\begin{array}{ll}t=u & e^tdt=dv\\ dt=du & e^t=v\end{array}\right|=-\frac{1}{2}\left(te^t-e^t\right)=-\frac{1}{2}e^t\left(t-1\right)=-\frac{1}{2}e^{-2x^2}\left(-2x^2-1\right)=\boxed{\frac{1}{2}e^{-2x^2}\left(2x^2+1\right)}$$

$$u(x) = e^{-\int p(x)dx}(c + \frac{1}{2}e^{-2x^2}\left(2x^2+1\right))$$

$$u(x) = e^{-\left(-2x^2\right)}(c + \frac{1}{2}e^{-2x^2}\left(2x^2+1\right))$$

$$u(x) = e^{2x^2}(c + \frac{1}{2}e^{-2x^2}\left(2x^2+1\right))$$

$$u(x) = c \cdot e^{2x^2} + \frac{1}{2}\left(2x^2+1\right)$$

$$\boxed{u(x) = c \cdot e^{2x^2} + x^2 + \frac{1}{2}}$$

Vratimo smenu:

$$\frac{1}{y^2} = c \cdot e^{2x^2} + x^2 + \frac{1}{2}$$

$$y^2 = \frac{1}{c \cdot e^{2x^2} + x^2 + \frac{1}{2}}$$

$$\boxed{y = \pm\sqrt{\frac{1}{c \cdot e^{2x^2} + x^2 + \frac{1}{2}}}}$$

Ovo je opšte rešenje!

Primer 3. Reši diferencijalnu jednačinu $xy\grave{}-2x^2\sqrt{y}=4y$

Rešenje: $xy\grave{}-2x^2\sqrt{y}=4y$

$xy\grave{}-4y=2x^2\sqrt{y}$

$xy\grave{}-4y=2x^2y^{\frac{1}{2}}$

$y\grave{}-\frac{4}{x}y=2x\ y^{\frac{1}{2}}$ ovo je Bernulijeva d.j. za koju je n = $\frac{1}{2}$ pa je smena:

$y\grave{}-\frac{4}{x}y=2x\ y^{\frac{1}{2}}$ sve podelimo sa y $^{\frac{1}{2}}$

$y^{1-n}=u$

$y^{\frac{1}{2}}=u$

$\frac{1}{2}y^{\frac{-1}{2}}y\grave{}=u\grave{}$

$\frac{y\grave{}}{y^{\frac{1}{2}}}=2u\grave{}$

Vratimo se u jednačinu:

$$\frac{y\grave{}}{y^{\frac{1}{2}}}-\frac{4}{x}\frac{y}{y^{\frac{1}{2}}}=2x$$

$2u\grave{}-\frac{4}{x}u=2x$ sve podelimo sa 2

$u\grave{}-\frac{2}{x}u=x$ ovo je linearna d.j. po u

u(x) = $e^{-\int p(x)dx}(c+\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx)$

$$\int p(x)dx=\int(-\frac{2}{x})dx=-2\ln|x|=\ln|x|^{-2}=\ln\frac{1}{x^2}$$

$$\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx=\int xe^{\ln x^{-2}}dx=\int x\frac{1}{x^2}dx=\int\frac{1}{x}dx=\ln|x|$$

u(x) = $e^{-\int p(x)dx}(c+\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx)=e^{\ln x^2}[c+\ln|x|]$

u(x) = $x^2[c+\ln|x|]$ rešenje linearne po *u*, vratimo smenu: $\sqrt{y}=u$

$\sqrt{y}=x^2[c+\ln|x|]$ kvadriramo

y = $x^4[c+\ln|x|]^2$ opšte rešenje

Primer 4.
Odredi ono rešenje diferencijalne jednačine $(x^2+y^2+2x)dx+2ydy=0$ **koje zadovoljava početni uslov y(0)=1**

Rešenje: Najpre ćemo rešiti datu diferencijalnu jednačinu a zatim naći vrednost konstante za dati uslov.

$(x^2+y^2+2x)dx+2ydy=0$ podelimo sve sa dx

$x^2+y^2+2x+2yy`=0 \rightarrow x^2+2x+y^2+2yy`=0$ podelimo sve sa $2y$

$$\frac{x^2+2x}{2y}+\frac{1}{2}y+y`=0$$

$y`+\frac{1}{2}y=-\frac{x^2+2x}{2}y^{-1}$ ovo je Bernulijeva d.j. za koju je $n = -1$

$$y^{1-n}=u$$

smena je : $y^2=u$

$$2yy`=u`$$

$y`+\frac{1}{2}y=-\frac{x^2+2x}{2}y^{-1}$ sve pomnožimo sa 2 y

$$2yy`+y^2=-\left(x^2+2x\right)$$

$u`+u=-\left(x^2+2x\right)$ ovo je linearna po u

$$u(x)=e^{-\int p(x)dx}(c+\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx)$$

$$\int p(x)dx=\int 1dx=x$$

$$\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx=-\int(x^2+2x)e^x dx=\begin{vmatrix} x^2+2x=u & e^x dx=dv \\ (2x+2)dx=du & e^x=v \end{vmatrix}=$$

$$-e^x(x^2+2x)+\int e^x(2x+2)dx=\begin{vmatrix} 2x+2=u & e^x dx=dv \\ 2dx=du & e^x=v \end{vmatrix}=$$

$$-e^x(x^2+2x)+[e^x(2x+2)-\int 2e^x dx]$$

$$-e^x(x^2+2x)+e^x(2x+2)-2e^x=$$

$$e^x(-x^2\cancel{-2x}\cancel{+2x}\cancel{+2}\cancel{-2})=-x^2e^x$$

$$u(x)=e^{-\int p(x)dx}(c+\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx)$$

$$u(x)=e^{-x}[c-x^2e^x]=\boxed{e^{-x}\cdot c-x^2}=$$

vratimo smenu :

$y^2=e^{-x}\cdot c-x^2$ i evo ga opšte rešenje . Stavimo x = 0 i y = 1

$1=c$, pa je odavde $c=1$ i partikularno rešenje je :

$$y^2=e^{-x}-x^2$$