1. U razvoju binoma $(\sqrt[5]{3}+\sqrt[7]{2})^n$ odnos koeficijenata drugog i trećeg člana je 2:23. Odrediti n i ispitati koliko članova ne sadrži iracionalne brojeve.

Rešenje:

Binomni koeficijenti su: $\binom{n}{0},\binom{n}{1},\binom{n}{2},\ldots,\binom{n}{n-1},\binom{n}{n}$.

Po tekstu zadatka je:

$$\binom{n}{1}:\binom{n}{2}=2:23$$

$$n:\frac{n(n-1)}{2\cdot 1}=2:23$$

$$23n=\frac{n(n-1)}{\cancel{2}}\cdot\cancel{2}$$

$$23n=n^2-n$$

$$n^2-24n=0$$

$$n=0\vee n=24$$

$$\boxed{n=24}$$

Prvi posao smo završili, sada da vidimo koliko ima članova koji ne sadrži iracionalne brojeve.

Iskoristićemo formulu:

$$T_{k+1}=\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$

Za našu situaciju $(\sqrt[5]{3}+\sqrt[7]{2})^{24}=\left(3^{\frac{1}{5}}+2^{\frac{1}{7}}\right)^{24}$

Imamo:

$$T_{k+1}=\binom{n}{k}a^{n-k}b^k=\binom{24}{k}\left(3^{\frac{1}{5}}\right)^{24-k}\left(2^{\frac{1}{7}}\right)^{k}=\boxed{\binom{24}{k}3^{\frac{24-k}{5}}\cdot 2^{\frac{k}{7}}}$$

Sad razmišljamo:

k može da uzima vrednosti od 0,1 ,2, …,24

Oba eksponenta moraju biti celi brojevi, jer tada nema iracionalnih članova, to jest $\frac{24-k}{5},\frac{k}{7}\in Z$

Za k=0 $\rightarrow\frac{24}{5}$ nije ceo broj

Za k=7 $\rightarrow\frac{7}{7}$ je ceo broj ali $\frac{24-7}{5}=\frac{17}{5}$ nije ceo broj

Za k=14 $\rightarrow\frac{14}{7}=2$ je ceo broj i $\frac{24-14}{5}=\frac{10}{5}=2$ je ceo broj $\rightarrow$ k=14 radi

Za k=21 $\rightarrow\frac{21}{7}$ je ceo broj ali $\frac{24-21}{5}=\frac{3}{5}$ nije ceo broj

Imamo samo **jedan** član koji je racionalan!

2. **U razvoju binoma** $(x\sqrt[4]{x}+\frac{1}{\sqrt[8]{x^5}})^n$ **zbir koeficijenata drugog člana od početka i trećeg člana od kraja je 78. Odrediti n i naći član koji ne sadrži x.**

Rešenje:

Znamo da su vrednosti binomnih koeficijenata simetrične:

$$\binom{n}{0}=\binom{n}{n}=1$$

$$\binom{n}{1}=\binom{n}{n-1}=n$$

$$\binom{n}{2}=\binom{n}{n-2}=\frac{n(n-1)}{2}.......itd.$$

Dakle:

$$\binom{n}{1}+\binom{n}{n-2}=\binom{n}{1}+\binom{n}{2}=78$$

$$n+\frac{n(n-1)}{2}=78............/*2$$

$$2n+n^2-n=156$$

$$n^2+n-156=0\rightarrow n=12\vee n=-13\rightarrow \boxed{n=12}$$

Vratimo ovo u početni binom i malo prisredimo....

$$(x\sqrt[4]{x}+\frac{1}{\sqrt[8]{x^5}})^{12}=(x\cdot x^{\frac{1}{4}}+\frac{1}{x^{\frac{5}{8}}})^{12}=(x^{\frac{5}{4}}+x^{-\frac{5}{8}})^{12}$$

Dalje koristimo formulu $T_{k+1}=\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$

$$T_{k+1}=\binom{n}{k}a^{n-k}b^k=$$

$$=\binom{12}{k}\left(x^{\frac{5}{4}}\right)^{12-k}\left(x^{-\frac{5}{8}}\right)^k$$

$$=\binom{12}{k}\left(x^{\frac{5(12-k)}{4}}\right)\left(x^{-\frac{5k}{8}}\right)$$

$$=\binom{12}{k}\left(x^{\frac{5(12-k)}{4}-\frac{5k}{8}}\right)$$

Ovo u izložiocu mora biti nula, jer tražimo član koji ne sadrži x, odnosno član gde je x^0.

$$\frac{5(12-k)}{4}-\frac{5k}{8}=0\rightarrow 10(12-k)-5k=0\rightarrow 120-10k-5k=0\rightarrow 15k=120\rightarrow \boxed{k=8}$$

Traženi član je $T_{k+1}=\binom{n}{k}a^{n-k}b^k\rightarrow T_{8+1}=\binom{12}{8}\rightarrow T_9=\binom{12}{4}=\frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=495$

3. Zbir koeficijenata poslednja tri člana u razvoju binoma $(\sqrt{2^{x+2}}+\frac{1}{\sqrt{2^{x+1}}})^n$ je 22.

a) Odrediti n

b) Za koje x je zbir trećeg i petog člana u datom razvoju jednak 135

Rešenje:

$$\binom{n}{n-2}+\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}=22$$

$$\binom{n}{2}+\binom{n}{1}+\binom{n}{0}=22$$

$$\frac{n(n-1)}{2}+n+1=22........../*2$$

$$n^2-n+2n+2-44=0$$

$$n^2+n-42=0 \rightarrow n=6 \vee n=-7 \rightarrow \boxed{n=6}$$

Zbir trećeg i petog člana u datom razvoju $(\sqrt{2^{x+2}}+\frac{1}{\sqrt{2^{x+1}}})^6$ jednak 135:

$$T_3+T_5=135$$

$$\binom{6}{2}\left(\sqrt{2^{x+2}}\right)^{6-2}\left(\frac{1}{\sqrt{2^{x+1}}}\right)^2+\binom{6}{4}\left(\sqrt{2^{x+2}}\right)^{6-4}\left(\frac{1}{\sqrt{2^{x+1}}}\right)^4=135$$

$$\binom{6}{2}\left(\sqrt{2^{x+2}}\right)^{4}\left(\frac{1}{\sqrt{2^{x+1}}}\right)^2+\binom{6}{4}\left(\sqrt{2^{x+2}}\right)^{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2^{x+1}}}\right)^4=135$$

$$\frac{6\cdot 5}{2\cdot 1}\left(2^{x+2}\right)^2\frac{1}{2^{x+1}}+\frac{6\cdot 5}{2\cdot 1}\left(2^{x+2}\right)\frac{1}{\left(2^{x+1}\right)^2}=135$$

$$15\cdot 2^{2x+4}\frac{1}{2^{x+1}}+15\cdot 2^{x+2}\frac{1}{2^{2x+2}}=135....../:15$$

$$2^{2x}\cdot 2^4\frac{1}{2^x\cdot 2}+2^x\cdot 2^2\frac{1}{2^{2x}\cdot 2^2}=9$$

$$2^x\cdot 8+\frac{1}{2^x}=9 \rightarrow \text{dobili smo eksponencijalnu jednačinu - smena } 2^x=t$$

$$8t+\frac{1}{t}=9......./*t$$

$$8t^2-9t+1=0 \rightarrow t_1=1 \wedge t_2=\frac{1}{8}$$

$$2^x=1 \rightarrow x=0$$

$$2^x=2^{-3} \rightarrow x=-3$$

4. Odrediti x ako je četvrti član u razvoju binoma $\left(\left(\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{\log x+1}}+\sqrt[12]{x}\right)^{6}$ **jednak 200.**

Rešenje:

Četvrti član je :

$$T_{k+1}=\binom{n}{k}a^{n-k}b^{k}$$

$$T_{3+1}=\binom{6}{3}\left(\left(\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{\log x+1}}\right)^{6-3}\left(\sqrt[12]{x}\right)^{3}=\frac{6\cdot5\cdot4}{3\cdot2\cdot1}\left(\sqrt{x}\right)^{\frac{3}{\log x+1}}\sqrt[4]{x}$$

$$T_4=20\cdot\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{3}{\log x+1}}\cdot x^{\frac{1}{4}}=20\cdot x^{\frac{\frac{3}{2}}{\log x+1}+\frac{1}{4}}$$

Spakovali smo sve lepo, sad ovo izjednačavamo sa 200

$$20\cdot x^{\frac{\frac{3}{2}}{\log x+1}+\frac{1}{4}}=200$$

$$x^{\frac{\frac{3}{2}}{\log x+1}+\frac{1}{4}}=10............/\log$$

$$\log x^{\frac{\frac{3}{2}}{\log x+1}+\frac{1}{4}}=\log 10$$

$$\left(\frac{\frac{3}{2}}{\log x+1}+\frac{1}{4}\right)\log x=1$$

$$\log x=t\rightarrow \text{smena}$$

$$\left(\frac{\frac{3}{2}}{t+1}+\frac{1}{4}\right)t=1....../*4(t+1)$$

$$\left(\frac{3}{2}\cdot4+t+1\right)t=4t+4$$

$$(7+t)t=4t+4$$

$$t^2+7t-4t-4=0$$

$$t^2+3t-4=0\rightarrow t_1=-4\wedge t_2=1$$

$$\log_{10}x=-4\rightarrow\boxed{x=10^{-4}}$$

$$\log_{10}x=1\rightarrow\boxed{x=10}$$