Kombinatorika

Neka je dat skup $S=\{a_1,a_2,...,a_n\}$. **Permutacije** tih n elemenata $a_1,a_2,...,a_n$ skupa S je bilo koja uređena n – torka obrazovana od različitih elemenata skupa S. Neki profesori vole da kažu da su permutacije preslikavanje skupa S u samog sebe.

Na primer, ako je $S=\{1,2,3\}$, permutacije će biti 123,132,213,231,312,321.

Broj permutacija n – točlanog skupa se računa po formuli $P(n)=n!$ (! – se čita faktorijel)

Računa se tako što pomnožimo sve brojeve počevši od n pa sve do jedinice:

$P(n)=n!=n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot...\cdot 2\cdot 1$ po definiciji je **0! = 1**

Na primer : $P(5)=5!=5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=120$, $P(7)=7!=7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=5040$

Neka je dat skup $S=\{a_1,a_2,...,a_n\}$. **Varijacije** bez ponavljanja k – te klase od n elemenata skupa S je bilo koja uređena k – torka različitih elemenata skupa S gde je $1\le k\le n$.

Na primer , ako je $S=\{1,2,3\}$, varijacije bez ponavljanja druge klase će biti 12,13,21,23,31,32.

Broj varijacija bez ponavljanja k – te klase od n elemenata se računa po formuli $V_k^n=n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot...\cdot(n-k+1)$

Znači, krenemo da množimo od n nadole , ali ne idemo do jedinice, već množimo samo k-njih.

Na primer : $V_3^{12}=12\cdot 11\cdot 10=1320$, $V_4^{10}=10\cdot 9\cdot 8\cdot 7=5040$

Neka je dat skup $S=\{a_1,a_2,...,a_n\}$. **Kombinacije** bez ponavljanja k-te klase ($1\le k\le n$) od n elemenata skupa S je bilo koji podskup od k elemenata skupa S.(bilo koja neuređena k-torka, neuređena u smislu da nas nije briga koji je prvi element,koji je drugi itd.)

Na primer , ako je $S=\{1,2,3\}$, kombinacije bez ponavljanja druge klase će biti 12,13,23.

Znači kombinacija 12 vidi isto kao 21, 13 isto kao 31 i 23 isto kao 32, nije je briga za redosled elemenata.

Broj kombinacija bez ponavljanja k – te klase od n elemenata se računa po formuli

$$C_k^n=\binom{n}{k}=\frac{V_k^n}{k!}=\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot...\cdot(n-k+1)}{k\cdot(k-1)\cdot...\cdot 2\cdot 1}$$ ili može i $$C_k^n=\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Zapis $\binom{n}{k}$ čita se „ n nad k“.

Na primer : $C_3^{12}=\binom{12}{3}=\frac{V_3^{12}}{3!}=\frac{12\cdot 11\cdot 10}{3\cdot 2\cdot 1}=220$, $C_2^8=\binom{8}{2}=\frac{8\cdot 7}{2\cdot 1}=28$

Neka je dat skup $S=\{a_1,a_2,...,a_n\}$.Şvaka uređena n – torka u kojoj se element a_1 pojavljuje k_1 puta, element a_2 pojavljuje k_2 puta, ..., element a_m pojavljuje k_m puta tako da je $k_1+k_2+...+k_m=n$ naziva se **permutacija sa ponavljanjem** skupa S.

Broj permutacija sa ponavljanjem se izračunava po formuli: $P_{k_1,k_2,...,k_m}(n)=\dfrac{n!}{k_1!\cdot k_2!\cdot...\cdot k_m!}$

Na primer , treba da izračunamo koliko ima permutacija od brojeva 4,4,5,5,5,7,7 ?

Ukupno imamo 7 elemenata, pa je n = 7. Četvorka se ponavlja dva puta , pa je $k_1=2$. Petica se ponavlja tri puta ,pa je $k_2=3$ i imamo dve sedmice $k_3=2$.

$$P_{2,3,2}(n)=\frac{7!}{2!\cdot 3!\cdot 2!}=\frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{2\cdot 1\cdot 3\cdot 2\cdot 1\cdot 2\cdot 1}=210$$

Neka je dat skup $S=\{a_1,a_2,...,a_n\}$. **Varijacije sa ponavljanjem** k – te klase ($k\geq 1$)od n elemenata skupa S je bilo koja uređena k – torka elemenata skupa S , gde se elementi mogu ponavljati.

Broj varijacija sa ponavljanjem se izračunava po formuli: $\overline{V}_k^n=n^k$.

Ovde se može desiti da k bude veći broj od n.

Na primer: Računamo koliko ima mogućnosti ako smo igrali 5 tiketa sa sportskom prognozom gde konačan ishod može biti pobeda domaćina, nerešeno i pobeda gostiju?

Ovde je n = 3 (tri mogućnosti) a k = 5 (igrali smo 5 tiketa) pa je $\overline{V}_5^3=3^5=243$.

To znači da su naše šanse za dobitak 1 : 243, pa matematika kaže da to **ne treba** igrati!

I ostade nam još samo formula za **kombinacije sa ponavljanjem**: $\overline{C}_k^n=\binom{n+k-1}{k}$

Na primer $\overline{C}_3^{10}=\binom{10+3-1}{3}=\binom{12}{3}=\dfrac{12\cdot 11\cdot 10}{3\cdot 2\cdot 1}=220$

Da se podsetimo formula :

BEZ PONAVLJANJA ELEMENATA	**SA PONAVLJANJEM**
$P(n)=n!=n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot...\cdot 2\cdot 1$	$P_{k_1,k_2,...,k_m}(n)=\dfrac{n!}{k_1!\cdot k_2!\cdot...\cdot k_m!}$
$C_k^n=\binom{n}{k}=\dfrac{V_k^n}{k!}=\dfrac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot...\cdot(n-k+1)}{k\cdot(k-1)\cdot...\cdot 2\cdot 1}$	$\overline{V}_k^n=n^k$
$V_k^n=n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot...\cdot(n-k+1)$	$\overline{C}_k^n=\binom{n+k-1}{k}$

KAKO PREPOZNATI DA LI SU P , V ILI C ?

Neka je dat skup S sa n različitih elemenata. **Ako radimo sa svih n elemenata**, odnosno pravimo sve moguće različite rasporede tih n elemenata , onda ćemo upotrebiti **permutacije**. Ako trebamo formirati sve njegove podskupove od po k različitih elemenata gde nam je **bitan redosled elemenata**, onda ćemo koristiti **VARIJACIJE.** Ako trebamo formirati podskupove gde nam **nije bitan redosled elemenata ,** onda ćemo upotrebiti **KOMBINACIJE.** Dve kombinacije k-te klase su jednake, ako imaju iste elemente, bez obzira kako su uredjene. Na primer : abcd=acdb=…=dcba. Kod kombinacija je svejedno kako pišemo elemente u jednom slogu, dok kod varijacija o tome moramo voditi računa.

Primer 1.

Pet osoba treba poređati u vrstu. Na koliko načina to možemo uraditi?

Rešenje:

Imamo 5 elemenata i radimo sa svima – to nam govori da su permutacije u pitanju:

$$P(5) = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

Primer 2.

U odeljenju ima 30 učenika.

a) Svako sa svakim se rukuje

b) Svako sa svakim razmenjuje fotografiju

Koliko ima rukovanja a koliko razmena fotografija?

Rešenje:

Evo lepog primera da uočimo razliku između varijacija i kombinacija.

U obe situacije broj elemenata n = 30 a pošto u rukovanju (razmeni) učestvuju po dva učenika to je klasa k = 2.

a) Neka se rukuju osoba A i osoba B. To rukovanje možemo zapisati AB = BA. Znači da nema veze koji je prvi a koji drugi – to nam govori da su u pitanju kombinacije!

$$C_2^{30} = \binom{30}{2} = \frac{30 \cdot 29}{2 \cdot 1} = 435$$

b) Kod razmene fotografija AB (osoba A dala fotografiju osobi B) i BA (osoba B dala fotografiju osobi A) nisu isti (bitan redosled) – pa su u pitanju varijacije!

$$V_2^{30} = 30 \cdot 29 = 870$$

Primer 3.

Koliko ima sedmocifrenih brojeva čije su cifre 3,3,3,5,5,7,7 ?

Rešenje:

Imamo sedam elemenata a pravimo sedmocifrene brojeve – to nam govori da su permutacije a pošto ima istih brojeva, permutacije sa ponavljanjem.

Pazite , nije bitno koji je broj, nego koliko se puta ponavlja.

$$P_{3,2,2}(n)=\frac{7!}{3!\cdot 2!\cdot 2!}=\frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{3\cdot 2\cdot 1\cdot 2\cdot 1\cdot 2\cdot 1}=210$$

Primer 4.

Koliko se različitih šestocifrenih brojeva može sastaviti od cifara 0,2,2,3,3,3 ?

Rešenje:

Ovaj zadatak je sličan prethodnom, ali je problem što ima 0, a ona ne može da bude na početku broja!

Ideja je da od svih permutacija sa ponavljanjem oduzmemo one bez 0.

$$P_{1,2,3}(n)=\frac{6!}{1!\cdot 2!\cdot 3!}=\frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{1\cdot 2\cdot 1\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=60 \qquad P_{2,3}(n)=\frac{5!}{2!\cdot 3!}=\frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{1\cdot 2\cdot 1\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=10$$

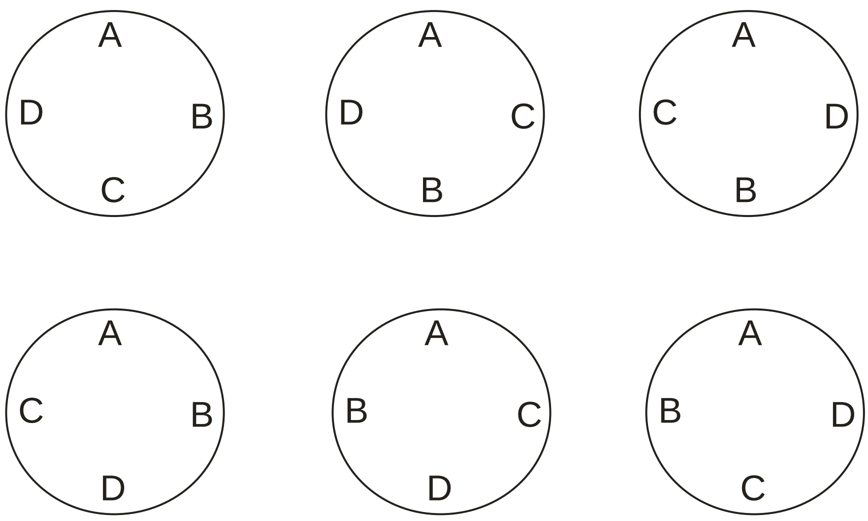
Konačno rešenje je 60 – 50 = 10

Primer 5.

Na koliko načina četiri osobe mogu da stanu u krug?

Rešenje:

Najbolje da mi to nacrtamo:



Dakle ima 6 mogućnosti!

A možete zapamtiti i kao formulicu: Oko okruglog stola n - osoba se mogu rasporediti na (n-1)! načina.

Za našu situaciju n = 4 pa imamo 3 ! = 3*2*1 =6.

Primer 6.

Na koliko različitih načina se moze raspodeliti 5 dečaka i 5 devojčica u bioskopskom redu od 10 stolica tako da dva dečaka nikad ne sede jedan pored drugog?

Rešenje:

Pošto ima 10 mesta a 2 dečaka ne smeju biti jedan do drugog, to znači da raspored ide jedan dečak jedna devojčica.

Deč.	Dev.	Deč.	Dev.	Deč.	Dev.	Deč.	Dev.	Deč.	Dev.

- Mogućnost za dečake je 5!
- Mogućnost za devojčice je 5!

Ali moramo razmišljati da na prvom mestu može biti i devojčica.

Dev.	Deč.	Dev.	Deč.	Dev.	Deč.	Dev.	Deč.	Dev.	Deč.

Pa je broj svih mogućnosti:

$$2 \cdot 5! \cdot 5! = 2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 2 \cdot 120 \cdot 120 = 28800$$

Primer 7.

Koliko se morzeovih znakova može formirati iz oba osnovna znaka **.** i **-** , ako se jedan znak sastoji najviše od pet elementarnih znakova?

Rešenje:

Razmišljamo:

- Imamo dva znaka : · i – (tačka i crta) pa je sigurno $n = 2$
- Pošto kaže da se jedan znak sastoji najviše od 5 elementarnih znakova razlikovaćemo 5 situacija:

1) Ako imamo samo 1 znak $\rightarrow \bar{V}_1^2$
2) Ako ima 2 znaka $\rightarrow \bar{V}_2^2$
3) Ako ima 3 znaka $\rightarrow \bar{V}_3^2$
4) Ako ima 4 znaka $\rightarrow \bar{V}_4^2$
5) Ako ima 5 znaka $\rightarrow \bar{V}_5^2$

Pa je konačno rešenje:

$$\bar{V}_1^2 + \bar{V}_2^2 + \bar{V}_3^2 + \bar{V}_4^2 + \bar{V}_5^2$$

$$2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5$$

$$2 + 4 + 8 + 16 + 32 = 62$$

Primer 8.

Odrediti broj različitih prirodnih brojeva od 10 000 koji se mogu formirati od cifara 0, 1, 2, 3, 4, 5.

Rešenje:

Traženi brojevi mogu biti:

1) Jednocifreni
2) Dvocifreni
3) Trocifreni
4) Četvorocifreni
5) Petocifreni

Imamo 6 brojeva: 0, 1, 2, 3, 4, 5 i cifre se mogu ponavljati, pa su u pitanju varijacije sa ponavljanjem. Moramo paziti da 0 nije na prvom mestu!

Zato ćemo naći sve mogućnosti pa oduzeti broj mogućnosti kada je 0 na prvom mestu.

1) Jednocifreni → to su brojevi 1, 2, 3, 4, 5 to jest $\bar{V}_1^5$
2) Dvocifreni → $\bar{V}_2^6 - \bar{V}_1^6 = 6^2 - 6^1 = 30$
3) Trocifreni → $\bar{V}_3^6 - \bar{V}_2^6 = 6^3 - 6^2 = 180$
4) Četvorocifreni → $\bar{V}_4^6 - \bar{V}_3^6 = 6^4 - 6^3 = 1080$
5) Petocifreni → $\bar{V}_5^6 - \bar{V}_4^6 = 6^5 - 6^4 = 6480$

Dakle ,konačno rešenje je: $5+30+180+1080+6480=7775$

Primer 9.

U ravni je dato 10 različitih tačaka od kojih ni jedna trojka nije kolinearna.

Odrediti broj svih pravih koje su odredjene datim tačkama.

Rešenje:

Pošto je prava odredjena dvema različitim tačkama, znači da od 10 biramo po 2.

Pošto redosled tačaka nije bitan u pitanju su kombinacije.

$$C_2^{10} = \binom{10}{2} = \frac{10 \cdot 9}{2 \cdot 1} = 45$$

10 tačaka od kojih ni jedna trojka nije kolinearna (ne leži na istoj pravoj) odredjuju 45 pravih.

Primer 10.

Košarkaški tim sačinjavaju 5 bekova, 4 centra i 3 krila. Na koliko načina se može od njih sastaviti petorka ako u njoj moraju da budu bar 2 beka i bar jedan centar?

Rešenje:

Pošto u zadatku kaže da moraju u petorci igrati bar 2 beka i 1 centar to nam daje više mogućnosti :

1) 2 beka, 1 centar, 2 krila $\rightarrow C_2^5 \cdot C_1^4 \cdot C_2^3$
2) 2 beka, 2 centra, 1 krilo $\rightarrow C_2^5 \cdot C_2^4 \cdot C_1^3$
3) 2 beka, 3 centra $\rightarrow C_2^5 \cdot C_3^4$
4) 3 beka, 1 centar, 1 krilo $\rightarrow C_3^5 \cdot C_1^4 \cdot C_1^3$
5) 3 beka, 2 centra $\rightarrow C_4^5 \cdot C_2^4$
6) 4 beka, 1 centar $\rightarrow C_4^5 \cdot C_1^4$

Sad je broj svih mogućnosti:

$$C_2^5 \cdot C_1^4 \cdot C_2^3 + C_2^5 \cdot C_2^4 \cdot C_1^3 + C_2^5 \cdot C_3^4 + \cdot C_3^5 \cdot C_1^4 \cdot C_1^3 + \cdot C_3^5 \cdot C_2^4 + C_4^5 \cdot C_1^4 =$$

$$\binom{5}{2}\binom{4}{1}\binom{3}{2} + \binom{5}{2}\binom{4}{2}\binom{3}{1} + \binom{5}{2}\binom{4}{3} + \binom{5}{3}\binom{4}{1}\binom{3}{1} + \binom{5}{3}\binom{4}{2} + \binom{5}{4}\binom{4}{1} = 540 \text{ mogućnosti}$$

Primer 11.

Koliko ima četvorocifrenih brojeva koji počinju sa 2 a završavaju se sa 7?

Rešenje:

To su brojevi 2 ▒ ▒ 7, gde umesto kvadratića mogu biti brojevi 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Znači, brojevi mogućnosti je:

$\overline{V}_1^2 = 10^2 = 10 \cdot 10 = 100$

Primer 12.

Koliko ima brojeva izmedju 3000 i 6000 koji se završavaju sa 3 ili 7?

Rešenje:

→ Brojevi koji počinju sa 3 su

3 ▒ ▒ 3 → $\bar{V}_2^{10} = 10^2 = 100$

3 ▒ ▒ 7 → $\bar{V}_2^{10} = 10^2 = 100$

→ Brojevi koji počinju sa 4

4 ▒ ▒ 3 → $\bar{V}_2^{10} = 10^2 = 100$

4 ▒ ▒ 7 → $\bar{V}_2^{10} = 10^2 = 100$

Slično je i: 5 ▒ ▒ 3 → 100 broja

5 ▒ ▒ 7 → 100 broja

6 ▒ ▒ 3 → 100 broja

6 ▒ ▒ 7 → 100 broja

Dakle, ukupno ima 100·6=600 brojeva

Primer 13.

Na koliko načina se 9 knjiga može podeliti na tri police tako da na svakoj bude po 3 knjige?

Rešenje:

1. polica _ _ _ → na njoj se knjige mogu postaviti na 3!= 3*2*1 = 6 načina

2. polica _ _ _ → na njoj se knjige mogu postaviti na 3!= 3*2*1 = 6 načina

3. polica _ _ _ → 3!= 3*2*1 = 6 načina

Konačno rešenje: $\frac{9!}{3!\cdot 3!\cdot 3!}=\frac{362880}{216}=1680$

Primer 14.

Pet kuglica ubacuje se u tri kutije, tako da neka kutija može biti i prazna. Koliko ima različitih rasporeda kuglica po kutijama?

Rešenje:

Ovde treba dobro razmisliti…

Kuglice ćemo obeležiti sa O, a pošto ima tri kutije, njih ćemo odvojiti sa dve crtice:

I kutija / II kutija / III kutija.

Svakom rasporedu kuglica po kutijama odgovara jedan raspored pet kružića i dve crtice!

Na primer:

O / O / OOO → U prvoj kutiji je jedna, u drugoj jedna a u trećoj tri kuglice

/ OO / OOO → Prva kutija je prazna , u drugoj su dve , a u trećoj tri kuglice

itd.

Znači, u pitanju su permutacije sa ponavljanjem, od 7 elemenata, gde su 2 ista i 5 ista.

$$\frac{7!}{2!\cdot 5!}=\frac{5040}{2\cdot 120}=21$$