ODREĐENI INTEGRAL

Određeni integral u Rimanovom smislu se obeležava sa :

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

Ovo se čita:” integral od a do b ef od iks de iks”.

- a je donja granica integrala
- b je gornja granica integrala
- f(x) je podintegralna funkcija (integrand)
- x je integraciona promenljiva
- [a,b] je interval integracije

Ako je funkcija f(x) neprekidna na segmentu [a,b], tada ona ima primitivnu funkciju $\int f(x)dx = F(x) + c$ i važi jednakost :

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Ova jednakost se zove **Njutn- Lajbnicova formula** i daje vezu između određenog i neodređenog integrala.

Može se reći da je ovo osnovna formula integralnog računa.

Osnovna svojstva određenog integrala

1) Ako je f(x) integrabilna funkcija u intervalu [a,b] , onda je :

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$

2) Ako su f(x) i g(x) integrabilne funkcije, onda je :

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

3) Ako integrabilne funkcije f(x) i g(x) zadovoljavaju u intervalu [a,b], gde je a<b, uslov $f(x) \le g(x)$,onda je:

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$$

4) Ako je m donja a M gornja medja integrabilne funkcije f(x) u intervalu [a,b], gde je $a \leq b$, onda je:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

5) Ako je funkcija neprekidna na intervalu [a,b], onda postoji tačka ξ iz intervala [a,b], tako da je :

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)\, f(\xi)$$

Ovo je teorema o srednjoj vrednosti odredjenog integrala!

6) Odredjeni integral menja znak kad mu se obrnu granice:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

7) Ako je funkcija f(x) integrabilna u intervalu [a,b] i ako je a<c<b onda je :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Ne mora svaka funkcija da bude integrabilna na odredjenom intervalu. Neki od glavnih kriterijuma su:

- Svaka ograničena funkcija f(x) u intervalu [a,b] sa konačnim brojem prekidnih tačaka između a i b je integrabilna u tom intervalu.

- Svaka monotona funkcija f(x) u intervalu [a,b] je integrabilna u tom intervalu.

- Svaka neprekidna funkcija u datom intervalu [a,b] je integrabilna u tom intervalu.

Smena promenljive u odredjenom integralu

Kao i kod neodredjenog i kod odredjenog integrala se može izvršiti smena integracione promenljive. To možemo uraditi na dva načina:

1. Prvo rešimo dati integral kao neodredjeni , vratimo smenu pa tu zamenimo gornju i donju granicu.

2. Izvršimo smenu direktno u datom integralu ali moramo menjati i granice integracije.

Neka je dat integral $\int_a^b f(x)dx$. Ovde naravno $x \in [a,b]$.

Uzmimo smenu $x = \varphi(t)$. Tada je:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi`(t)dt \quad \text{ali su nove granice : } t \in [\alpha, \beta] \text{ gde je } \varphi(\alpha) = a \wedge \varphi(\beta) = b$$

Parcijalna integracija

Nju radimo kao kod neodredjenog integrala i granice ostaju iste!

Zapamtite: Neodređeni integral je funkcija, a određeni integral je broj!

Evo nekoliko laganijih primera:

1. Reši integral : $\int_1^3 x^3 dx$

Ovaj integral je tablični i njegovo rešenje je $\frac{x^4}{4}$, pa tu stavimo jednu uspravnu crtu i napišemo brojeve iz granica integrala: $\frac{x^4}{4}\Big|_1^3$. Sada x menjamo sa 3 pa od toga oduzmemo kad x zamenimo sa 1. To jest:

$$\int_1^3 x^3 dx = \frac{x^4}{4}\Big|_1^3 = \frac{3^4}{4} - \frac{1^4}{4} = \frac{81-1}{4} = 20$$

---

2. Reši integral: $\int_0^2 \frac{dx}{x+2}$

Ovaj zadatak očigledno zahteva smenu. Rešićemo ga na dva načina, a Vi izaberite šta vam je lakše.

a. Skinućemo granice i rešiti ga kao neodređeni:

$$\int \frac{dx}{x+2} = \begin{vmatrix} x+2=t \\ dx=dt \end{vmatrix} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| = \text{vratimo smenu} = \ln|x+2|$$

Sada vratimo rešenje u određeni integral i granice se ne menjaju!

$$\int_0^2 \frac{dx}{x+2} = \ln|x+2|\Big|_0^2 = \ln|2+2| - \ln|0+2| = \ln 4 - \ln 2 = \ln\frac{4}{2} = \ln 2$$

b. Radićemo integral direktno , i u toku rada promeniti granice!

$$\int_0^2 \frac{dx}{x+2} = \begin{vmatrix} x+2=t \\ dx=dt \end{vmatrix}, \text{ ali je sada,} \begin{vmatrix} x+2=t \Rightarrow 2+2=t \Rightarrow t=4 \\ x+2=t \Rightarrow 0+2=t \Rightarrow t=2 \end{vmatrix} \text{novi integral po t ima granice od 2 do 4}$$

$$=\int_2^4 \frac{dt}{t} = \ln t \Big|_2^4 = \ln 4 - \ln 2 = \ln 2$$

----

3. Reši integral : $\int_1^e x^3 \ln x dx$

Ovaj integral ćemo rečiti parcijalnom integracijom a tu ne menjamo granice integracije , osim ako tokom rada ne koristimo smenu.

$$\int_1^e x^3 \ln x dx = \begin{vmatrix} \ln x = u & x^3 dx = dv \\ \frac{1}{x} dx = du & \frac{x^4}{4} = v \end{vmatrix} = \ln x \frac{x^4}{4} \Big|_1^e - \int_1^e \frac{1}{x} \frac{x^4}{4} dx$$

$$= (\ln e \frac{e^4}{4} - \ln 1 \frac{1^4}{4}) - \frac{1}{4} \int_1^e x^3 dx$$

$$= \frac{e^4}{4} - \frac{1}{4} \frac{x^4}{4} \Big|_1^e$$

$$= \frac{e^4}{4} - \frac{1}{4} (\frac{e^4}{4} - \frac{1}{4})$$

$$= \frac{e^4}{4} - \frac{e^4}{16} + \frac{1}{16} = \frac{3e^4}{16} + \frac{1}{16} = \frac{3e^4+1}{16}$$