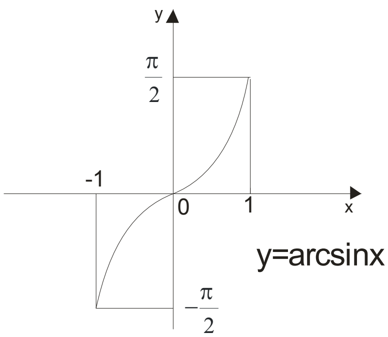
1. Ispitati tok i skicirati grafik funkcije $y = \arcsin \frac{2x}{x^2+1}$

Oblast definisanosti (domen)

Podsetimo se grafika elementarnih funkcija i kako izgleda arcsinx funkcija:



Funkcija je definisana za $x \in [-1,1]$

Za našu funkciju imamo: $-1 \le \frac{2x}{x^2+1} \le 1$ **i ovo rešavamo kao dve nejednačine!**

$-1 \le \frac{2x}{x^2+1} \wedge \frac{2x}{x^2+1} \le 1$ obe nejednakosti smemo pomnožiti sa x^2+1 jer je $x^2+1>0$

$-x^2-1 \le 2x \wedge 2x \le x^2+1$

$0 \le x^2+2x+1 \wedge 0 \le x^2-2x+1$

$0 \le (x+1)^2 \wedge 0 \le (x-1)^2$

Kako je ovo uvek tačno, za svako x, zaključujemo da je $D_f = (-\infty, \infty)$ a to nam govori da nemamo vertikalnih asimptota.

Nule funkcije

$$\arcsin \frac{2x}{x^2+1} = 0 \to \frac{2x}{x^2+1} = 0 \to 2x = 0 \to \boxed{x=0}$$

Znak funkcije

$$y>0 \to \arcsin \frac{2x}{x^2+1} > 0 \to 2x>0 \to x>0$$

$$y<0 \to \arcsin \frac{2x}{x^2+1} < 0 \to 2x<0 \to x<0$$

Parnost i neparnost

Ovde koristimo činjenicu da je arcsinx neparna funkcija (vidi još jednom njen grafik)

$$f(-x) = \arcsin \frac{2(-x)}{(-x)^2+1} = \arcsin \frac{-2x}{x^2+1} = -\arcsin \frac{2x}{x^2+1} = -f(x)$$

Zaključujemo da je i naša funkcija neparna, odnosno da je grafik simetričan u odnosu na koordinatni početak!

$$y = \arcsin\frac{2x}{x^2+1}$$

$$y` = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)^2}} \cdot \left(\frac{2x}{x^2+1}\right)`$$

$$y` = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{4x^2}{\left(x^2+1\right)^2}}} \cdot \left(\frac{(2x)`\left(x^2+1\right)-\left(x^2+1\right)`2x}{(x^2+1)^2}\right)$$

$$y` = \frac{1}{\sqrt{\frac{\left(x^2+1\right)^2-4x^2}{\left(x^2+1\right)^2}}} \cdot \left(\frac{2\cdot\left(x^2+1\right)-2x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}\right)$$

$$y` = \frac{1}{\sqrt{\frac{x^4+2x^2+1-4x^2}{\left(x^2+1\right)^2}}} \cdot \left(\frac{2x^2+2-4x^2}{(x^2+1)^2}\right)$$

$$y` = \frac{1}{\sqrt{\frac{x^4-2x^2+1}{\left(x^2+1\right)^2}}} \cdot \left(\frac{2-2x^2}{(x^2+1)^2}\right)$$

$$y` = \frac{1}{\sqrt{\frac{\left(x^2-1\right)^2}{\left(x^2+1\right)^2}}} \cdot \left(\frac{2\left(1-x^2\right)}{(x^2+1)^2}\right)$$

Ovde moramo voditi računa :

$\sqrt{\left(x^2+1\right)^2} = x^2+1$ **jer je** $x^2+1 > 0$ **uvek dok je** $\sqrt{\left(x^2-1\right)^2} = \left|x^2-1\right|$

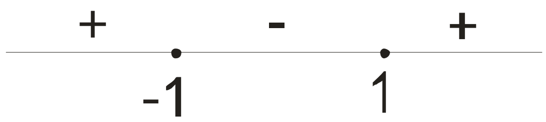
Vratimo se na izvod:

$$y` = \frac{1}{\frac{\left|x^2-1\right|}{\cancel{\left(x^2+1\right)}}} \cdot \frac{2\left(1-x^2\right)}{\left(x^2+1\right)^{\cancel{2}}} \rightarrow y` = \frac{-2\left(x^2-1\right)}{\left|x^2-1\right|\cdot\left(x^2+1\right)} =$$

$$\boxed{y` = \frac{-2\left(x^2-1\right)}{\left|x^2-1\right|\cdot\left(x^2+1\right)}}$$

E sad možemo razmišljati na dva načina (Vi naravno radite kako vaš profesor zahteva....)

Kako za $\left|x^2-1\right|$ važi :



odnosno da je:

$$\left|x^2-1\right| = \begin{cases} x^2-1, \quad za \quad x \in (-\infty,-1) \cup (1,\infty) \quad \text{to jest za} \quad |x|>1 \\ 1-x^2, \quad za \quad x \in (-1,1) \quad \text{to jest za} \quad |x|<1 \end{cases}$$

Prvi izvod funkcije će biti:

$$y` = \begin{cases} \dfrac{-2\cancel{\left(x^2-1\right)}}{\cancel{\left(x^2-1\right)} \cdot \left(x^2+1\right)} = \dfrac{-2}{1+x^2}, \quad za \quad |x|>1 \\ \overset{\text{Ovde ostane -1}}{} \\ \dfrac{-2\cancel{\left(x^2-1\right)}}{\cancel{\left(1-x^2\right)} \cdot \left(x^2+1\right)} = \dfrac{2}{1+x^2}, \quad za \quad |x|<1 \end{cases}$$

Sad zaključujemo da je :

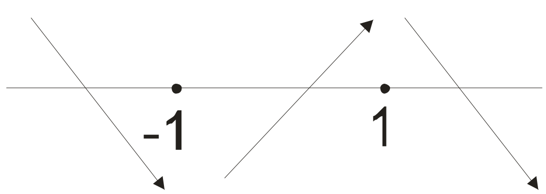
$za \quad |x|>1$ funkcija opadajuća jer je $\dfrac{-2}{1+x^2} < 0$ uvek

$za \quad |x|<1$ funkcija rastuća jer je $\dfrac{2}{1+x^2} > 0$ uvek

Zapazimo da prvi izvod nije definisan u tačkama x = -1 i x = 1, ali

moguće tačke lokalnog ekstremuma su tačke u kojima funkcija nije diferencijabilna.

To su tačke x = -1 i x = 1.



Vidimo da za x = -1 funkcija menja smisao monotonosti prelazeći iz opadanja u rastenje pa je to tačka lokalnog minimuma a slično zaključujemo da je x = 1 tačka lokalnog maksimuma.

Da nadjemo vrednosti za y:

za <u>x = -1</u> je $y = \arcsin\dfrac{2(-1)}{(-1)^2+1} = \arcsin(-1) = -\dfrac{\pi}{2}$ **paje** $M_1(-1,-\dfrac{\pi}{2})$ **tačka minimuma**

za <u>x = 1</u> je $y = \arcsin\dfrac{2\cdot(1)}{(1)^2+1} = \arcsin(1) = \dfrac{\pi}{2}$ **paje** $M_2(1,\dfrac{\pi}{2})$ **tačka maksimuma**

Na drugi način prvi izvod smo mogli da spakujemo koristeći funkciju sgn (znak):

$$y`=\frac{-2\left(x^2-1\right)}{\left|x^2-1\right|\cdot\left(x^2+1\right)}= \text{ sad skratimo } x^2-1 \text{ i dobijamo } y`=\frac{-2\operatorname{sgn}\left(x^2-1\right)}{\left(x^2+1\right)}$$

Ova oznaka $\operatorname{sgn}\left(x^2-1\right)$ može imati vrednosti 1 i – 1. Dalje je razmišljanje sve isto....

Da se vratimo sada na zadatak. Stali smo kod ekstrema koje smo dobili na mestima gde prvi izvod nije definisan.

Najpre ćemo da se iz teorije podsetimo šta su to **tačke preloma** :

Ako su $f_{-}^{`}(a)$ i $f_{+}^{`}(a)$ konačne vrednosti i ako je $f_{-}^{`}(a)\neq f_{+}^{`}(a)$, za tačku $A(a,f(a))$ kažemo da je prelomna tačka deo po deo glatke krive $y=f(x)$.

U našoj situaciji imamo posao da nadjemo 4 limesa:

$$\lim_{x\to-1-\varepsilon} f`(x)=? \quad \lim_{x\to-1+\varepsilon} f`(x)=? \quad \lim_{x\to1-\varepsilon} f`(x)=? \quad \lim_{x\to1+\varepsilon} f`(x)=?$$

Moramo da vodimo računa kad koju vrednost za prvi izvod uzimamo:

$$y`=\begin{cases}\dfrac{-2}{1+x^2}, & za \quad x\in(-\infty,-1)\cup(1,\infty)\\ \dfrac{2}{1+x^2}, & za \quad x\in(-1,1)\end{cases}$$

$$\lim_{x\to-1-\varepsilon}\left(\frac{-2}{1+x^2}\right)=\frac{-2}{1+(-1-\varepsilon)^2}=\frac{-2}{1+1}=-1$$

$$\lim_{x\to-1+\varepsilon}\left(\frac{2}{1+x^2}\right)=\frac{2}{1+(-1+\varepsilon)^2}=\frac{2}{1+1}=1$$

$$\lim_{x\to1-\varepsilon}\left(\frac{2}{1+x^2}\right)=\frac{2}{1+(1-\varepsilon)^2}=\frac{2}{1+1}=1$$

$$\lim_{x\to1+\varepsilon}\left(\frac{-2}{1+x^2}\right)=\frac{-2}{1+(1+\varepsilon)^2}=\frac{-2}{1+1}=-1$$

Odavde zaključujemo da su naše tačke $M_1(-1,-\frac{\pi}{2})$ **i** $M_2(1,\frac{\pi}{2})$ **prelomne tačke!**

Prevojne tačke i konveksnost i konkavnost

$$y`=\begin{cases} \dfrac{-2}{1+x^2}, & za \quad x\in(-\infty,-1)\cup(1,\infty) \\ \dfrac{2}{1+x^2}, & za \quad x\in(-1,1) \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} y``=-2\cdot\left(-\dfrac{1}{\left(1+x^2\right)^2}\right)\cdot\left(1+x^2\right)`=-2\cdot\left(-\dfrac{1}{\left(1+x^2\right)^2}\right)\cdot 2x=\dfrac{4x}{\left(1+x^2\right)^2} \\ y``=2\cdot\left(-\dfrac{1}{\left(1+x^2\right)^2}\right)\cdot\left(1+x^2\right)`=2\cdot\left(-\dfrac{1}{\left(1+x^2\right)^2}\right)\cdot 2x=\dfrac{-4x}{\left(1+x^2\right)^2} \end{matrix}$$

Dakle:

$$y``=\begin{cases} \dfrac{4x}{\left(1+x^2\right)^2} & za \quad x\in(-\infty,-1)\cup(1,\infty) \\ \dfrac{-4x}{\left(1+x^2\right)^2} & za \quad x\in(-1,1) \end{cases}$$

Odavde je jasno da je prevojna tačka $x=0\rightarrow y=0\rightarrow P(0,0)$

y``< 0 za $x\in(-\infty,-1)\cup(0,1)$ mršti se

y``> 0 za $x\in(-1,-0)\cup(1,\infty)$ smeje se

Asimptote funkcije (ponašanje funkcije na krajevima oblasti definisanosti)

Iz oblasti definisanosti smo zaključili da nema vertikalnu asimptotu.

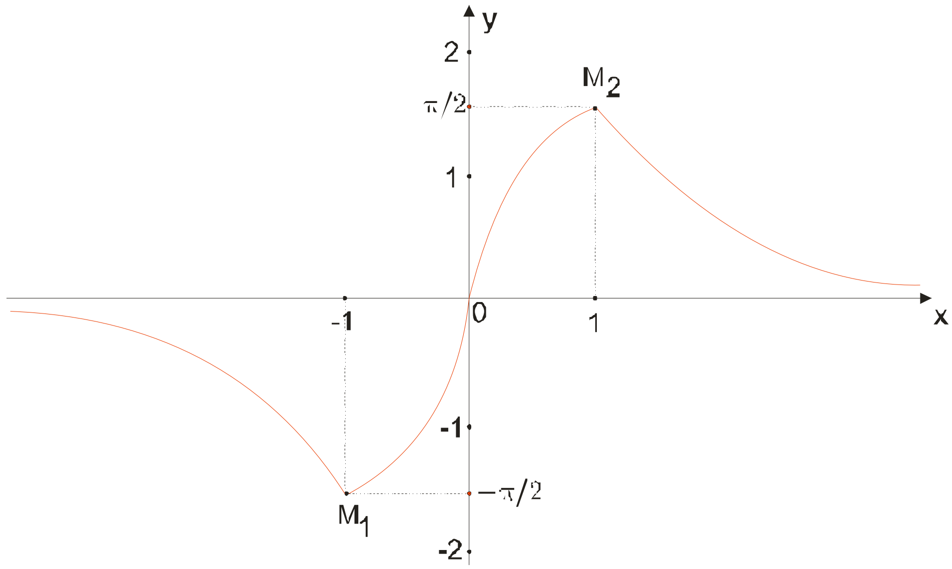
Da ispitamo sada horizontalnu:

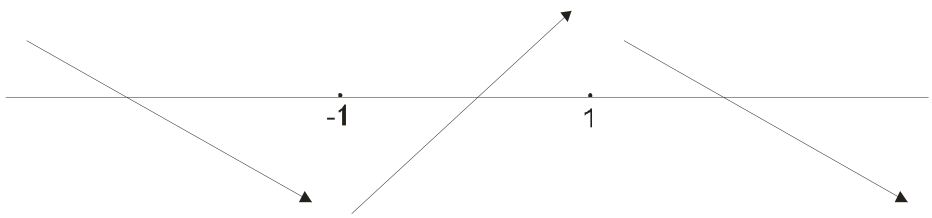
$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\arcsin\frac{2x}{x^2+1}\right)=\arcsin\left(\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x}{x^2+1}\right)=\arcsin 0=0$$

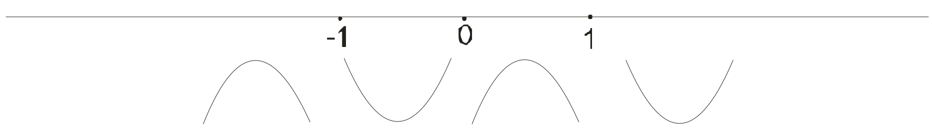
Dakle, prava y = 0 (odnosno x- osa) je horizontalna asimptota.

Odavde zaključujemo da nema kose asimptote!

Još da spakujemo grafik:





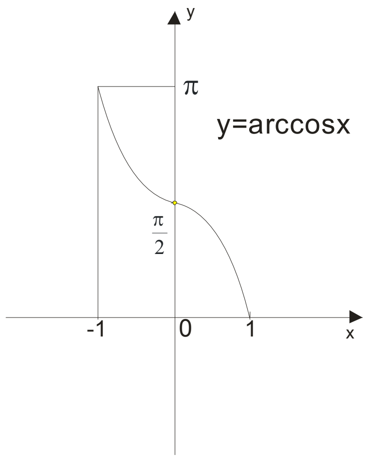


www.matematiranje.in.rs

2. Ispitati tok i skicirati grafik funkcije $y = \arccos\frac{1-x^2}{1+x^2}$

Oblast definisanosti (domen)

Da se podsetimo:



Funkcija je definisana za $x \in [-1,1]$

Za našu funkciju imamo:

$$-1 \le \frac{1-x^2}{1+x^2} \le 1 \rightarrow \text{sve puta } 1+x^2 \rightarrow -\left(1+x^2\right) \le 1-x^2 \le 1+x^2$$
$$-1-x^2 \le 1-x^2 \quad \wedge \quad 1-x^2 \le 1+x^2$$
$$-1 \le 1 \quad \wedge \quad 0 \le 2x^2$$

Ove dve nejednakosti očigledno uvek važe pa je $D_f = (-\infty,\infty)$ a to nam govori da nemamo vertikalnih asimptota.

Nule funkcije

$\arccos\frac{1-x^2}{1+x^2} = 0 \rightarrow \frac{1-x^2}{1+x^2} = 1 \rightarrow \boxed{x=0}$ **(Pogledajte grafik elementarne funkcije još jednom)**

Znak funkcije

Kako je funkcija arccosx pozitivna za svaki x iz domena, to je i naša funkcija stalno pozitivna (naravno u 0 ima nulu…)

Parnost i neparnost

$$f(-x) = \arccos\frac{1-(-x)^2}{1+(-x)^2} = \arccos\frac{1-x^2}{1+x^2} = f(x)$$

Funkcija je parna, a grafik će biti simertičan u odnosu na y osu.

$$y = \arccos\frac{1-x^2}{1+x^2}$$

$$y` = -\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2}}\cdot\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)`$$

$$y` = -\frac{1}{\sqrt{\frac{\left(1+x^2\right)^2-\left(1-x^2\right)^2}{\left(1+x^2\right)^2}}}\cdot\left(\frac{-2x(1+x^2)-2x(1-x^2)}{\left(1+x^2\right)^2}\right)$$

$$y` = -\frac{1}{\sqrt{\frac{\cancel{1}+2x^2\cancel{+x^4}\cancel{-1}+2x^2\cancel{-x^4}}{\left(1+x^2\right)^2}}}\cdot\left(\frac{-2x\cancel{-2x^3}-2x\cancel{+2x^3}}{\left(1+x^2\right)^2}\right)$$

$$y` = -\frac{1}{\sqrt{\frac{4x^2}{\left(1+x^2\right)^2}}}\cdot\left(\frac{-4x}{\left(1+x^2\right)^2}\right)\to y` = +\frac{1}{\frac{|2x|}{\cancel{\left(1+x^2\right)}}}\cdot\left(\frac{4x}{\left(1+x^2\right)^{\cancel{2}}}\right)\to\boxed{y` = \frac{2x}{|x|\left(1+x^2\right)}}$$

Zbog apsolutne vrednosti imamo:

Za x > 0 je $y` = \frac{2\cancel{x}}{\cancel{x}\left(1+x^2\right)}\to\boxed{y` = \frac{2}{\left(1+x^2\right)}}$ **ovde je funkcija rastuća** $y` > 0$

Za x < 0 je $y` = \frac{2\cancel{x}}{\cancel{-x}\left(1+x^2\right)}\to\boxed{y` = \frac{-2}{\left(1+x^2\right)}}$ **a ovde je opadajuća** $y` < 0$

Zaključujemo da u tački M(0,0) funkcija ima minimum.

Sad tražimo one limese da dokažemo da je prelomna tačka:

$$\lim_{x\to 0-\varepsilon}\frac{-2}{\left(1+x^2\right)} = \frac{-2}{1+(0-\varepsilon)^2} = \frac{-2}{1+0} = -2 \quad \text{i} \quad \lim_{x\to 0+\varepsilon}\frac{2}{\left(1+x^2\right)} = \frac{2}{1+(0+\varepsilon)^2} = \frac{2}{1+0} = 2$$

Prevojne tačke i konveksnost i konkavnost

Za x > 0 je $\boxed{y` = \frac{2}{\left(1+x^2\right)}}$

$$y`` = 2\cdot\frac{-1}{(1+x^2)^2}\cdot(1+x^2)` = \frac{-2}{(1+x^2)^2}\cdot 2x \rightarrow \boxed{y`` = \frac{-4x}{(1+x^2)^2}}$$

Kako je **x > 0** zaključujemo da je ovde $y`` < 0$

Za x < 0 je $\boxed{y` = \frac{-2}{\left(1+x^2\right)}}$

$$y`` = -2\cdot\frac{-1}{(1+x^2)^2}\cdot(1+x^2)` = \frac{2}{(1+x^2)^2}\cdot 2x \rightarrow \boxed{y`` = \frac{4x}{(1+x^2)^2}}$$

Kako je **x < 0** i ovde $y`` < 0$

Zaključujemo da je $y`` < 0$ stalno, odnosno da se funkcija stalno mršti!

Asimptote funkcije (ponašanje funkcije na krajevima oblasti definisanosti)

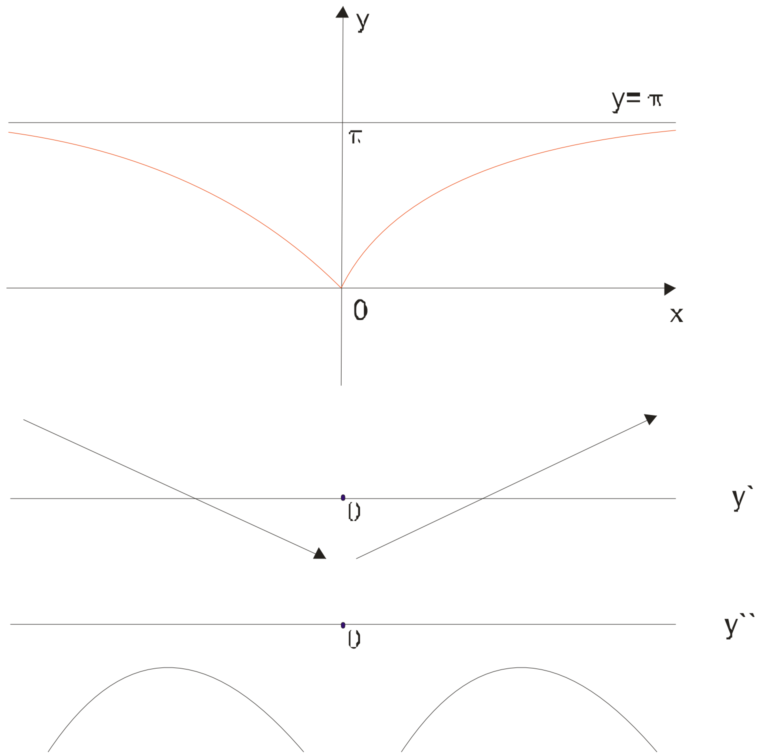
Već smo rekli da nema vertikalne asimptote,

da ispitamo horizontalnu:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\arccos\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) = \arccos\left(\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) = \arccos(-1) = \pi$$

Dakle, $y = \pi$ je horizontalna asimptota pa kose asimptote nema.

Sad sklapamo grafik:

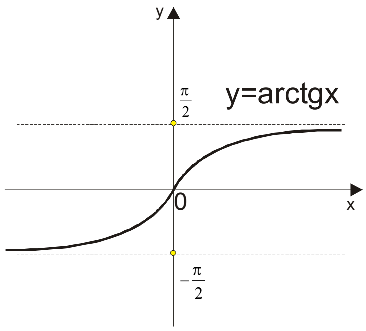


www.matematiranje.in.rs

3. Ispitati tok i skicirati grafik funkcije $y = arctg\dfrac{x-1}{x^2-5x+6}$

Oblast definisanosti (domen)

Da se podsetimo, arctgx je definisana na celom slupu realnih brojeva…..



Ovde nam samo treba da imenilac ne bude nula: $x^2-5x+6 \neq 0 \rightarrow x \neq 2 \wedge x \neq 3$

$Df = (-\infty,2) \cup (2,3) \cup (3,\infty)$

Nule funkcije

$arctg\dfrac{x-1}{x^2-5x+6} = 0 \rightarrow \dfrac{x-1}{x^2-5x+6} = 0 \rightarrow x-1=0 \rightarrow \boxed{x=1}$

Znak funkcije

Sa elementarnog grafika vidimo da je arctgx pozitivan vrednosti x koje su pozitivne. Kad to primenimo kod nas,

$\dfrac{x-1}{x^2-5x+6} > 0$ i analogno, naša funkcija je negativna za $\dfrac{x-1}{x^2-5x+6} < 0$.

Kao i uvek u ovakvim situacijama, radimo tablično.

	- ∞ … 1	1 … 2	2 … 3	3 … ∞
x-1	-	+	+	+
x-2	-	-	+	+
x-3	-	-	-	+
y	-	+	-	+

Dakle:

$y > 0$ za $x \in (1,2) \cup (3,\infty)$

$y < 0$ za $x \in (-\infty,1) \cup (2,3)$

Parnost i neparnost

$f(-x) = arctg\dfrac{-x-1}{x^2+5x+6}$ pa funkcija nije ni parna ni neparna

Ekstremne vrednosti (max i min) i monotonost (rašćenje i opadanje)

$$y = arctg\frac{x-1}{x^2-5x+6}$$

$$y` = \frac{1}{1+\left(\frac{x-1}{x^2-5x+6}\right)^2}\cdot\left(\frac{x-1}{x^2-5x+6}\right)`$$

$$y` = \frac{1}{1+\left(\frac{x-1}{(x-2)(x-3)}\right)^2}\cdot\left(\frac{1(x^2-5x+6)-(2x-5)(x-1)}{\left(x^2-5x+6\right)^2}\right)$$

$$y` = \frac{1}{\frac{(x-2)^2(x-3)^2+\left(x-1\right)^2}{(x-2)^2(x-3)^2}}\cdot\left(\frac{x^2-5x+6-2x^2+2x+5x-5}{\left(x^2-5x+6\right)^2}\right)$$

$$y` = \frac{\cancel{(x-2)^2(x-3)^2}}{(x-2)^2(x-3)^2+\left(x-1\right)^2}\cdot\frac{-x^2+2x+1}{\cancel{(x-2)^2(x-3)^2}}$$

$$\boxed{y` = \frac{-x^2+2x+1}{(x-2)^2(x-3)^2+\left(x-1\right)^2}}$$

Izraz u imeniocu je uvek pozitivan (radi se o kvadratima brojeva) pa će na znak da nam utiče samo kvadratni trinom u broiocu.

$$-x^2+2x+1=0 \rightarrow x_{1,2} = \frac{-2\pm\sqrt{4+4}}{-2} \rightarrow x_{1,2} = \frac{-2\pm2\sqrt{2}}{-2} = \frac{-2(1\mp\sqrt{2})}{-2}$$

$$x_1 = 1-\sqrt{2}$$
$$x_2 = 1+\sqrt{2}$$

E sad je ovo malo zamršeno za menjanje u zadatu funkciju , pa ćemo uzeti približne vrednosti....

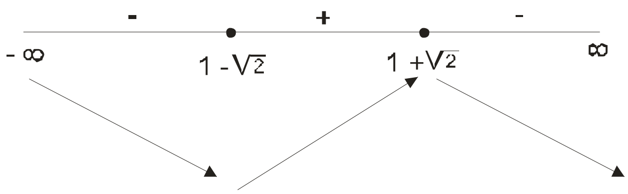
$$x_1 = 1-\sqrt{2} \approx -0,41$$
$$x_2 = 1+\sqrt{2} \approx 2,41$$

Najpre izračunajte na digitronu vrednost za $\dfrac{x-1}{x^2-5x+6}$ pa onda arctg od toga.

$M_1(1-\sqrt{2};\ \text{- 0,17})$

$M_2(1+\sqrt{2};\ \text{- 1,40})$

Što se tiče rašćenja i opadanja, imamo:



Onda zaključimo da je tačka M_1 minimum, a tačka M_2 maksimum funkcije.

Prevojne tačke i konveksnost i konkavnost

$$y` = \frac{-x^2+2x+1}{(x-2)^2(x-3)^2+\left(x-1\right)^2}$$

$$y`` = \frac{(-2x+2)\left((x-2)^2(x-3)^2+\left(x-1\right)^2\right)-\left(2(x-2)(x-3)^2+2(x-3)(x-2)^2+2(x-1\right)\left(-x^2+2x+1\right)}{\left((x-2)^2(x-3)^2+\left(x-1\right)^2\right)^2}$$

Posle pažljivog sredjivanja....

$$y`` = \frac{2(x^5-8x^4+18x^3+8x^2-75x+68)}{\left((x-2)^2(x-3)^2+\left(x-1\right)^2\right)^2}$$

Sad se javlja još jedan problem....

Treba rešiti jednačinu $x^5-8x^4+18x^3+8x^2-75x+68=0$ koja nam daje prevoje i govori nam o konveksnosti i konkavnosti.

Naše dosadašnje znanje nam govori da posmatramo slobodan član 68 i probamo redom njegove činioce.

Medjutim , desi se da neće nijedan broj da bude rešenje ove jednačine....

Treba primeniti neku drugu numeričku metodu , koja nama za sada ne treba pa ćemo vam dati konačna rešenja:

$x_1 \approx -1,86$
$x_2 \approx 1,63$ Ostale dve nule su kompleksni brojevi, pa nam ne trebaju....
$x_3 \approx 3,5$

Ovde ćemo zaključiti da ima tri prevojne tačke i nećemo više ispitivati ništa, budući da smo rešenja našli postupkom koji je većini za sada nepoznat.

Asimptote funkcije (ponašanje funkcije na krajevima oblasti definisanosti)

Vertikalna

$$\lim_{\substack{x\to 2-\varepsilon \\ \varepsilon\to 0}} arctg\frac{x-1}{x^2-5x+6} = arctg\lim_{\substack{x\to 2-\varepsilon \\ \varepsilon\to 0}}\frac{x-1}{(x-2)(x-3)} = arctg\frac{2-\varepsilon-1}{(2-\varepsilon-2)(2-\varepsilon-3)} = arctg\frac{1}{-\varepsilon\cdot(-1)} = arctg\frac{1}{0} = arctg\infty = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{\substack{x\to 2+\varepsilon \\ \varepsilon\to 0}} arctg\frac{x-1}{x^2-5x+6} = arctg\lim_{\substack{x\to 2+\varepsilon \\ \varepsilon\to 0}}\frac{x-1}{(x-2)(x-3)} = arctg\frac{2+\varepsilon-1}{(2+\varepsilon-2)(2+\varepsilon-3)} = arctg\frac{1}{+\varepsilon\cdot(-1)} = arctg\frac{1}{-0} = arctg\left(-\infty\right) = -\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{\substack{x\to 3-\varepsilon \\ \varepsilon\to 0}} arctg\frac{x-1}{x^2-5x+6} = arctg \lim_{\substack{x\to 3-\varepsilon \\ \varepsilon\to 0}} \frac{x-1}{(x-2)(x-3)} = arctg\frac{3-\varepsilon-1}{(3-\varepsilon-2)(3-\varepsilon-3)} = arctg\frac{2}{1\cdot(-\varepsilon)} = arctg\frac{1}{-0} = arctg(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{\substack{x\to 3+\varepsilon \\ \varepsilon\to 0}} arctg\frac{x-1}{x^2-5x+6} = arctg \lim_{\substack{x\to 3+\varepsilon \\ \varepsilon\to 0}} \frac{x-1}{(x-2)(x-3)} = arctg\frac{3+\varepsilon-1}{(3-\varepsilon-2)(3+\varepsilon-3)} = arctg\frac{2}{1\cdot(+\varepsilon)} = arctg\frac{1}{0} = arctg(\infty) = \frac{\pi}{2}$$

Horizontalna

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(arctg\frac{x-1}{x^2-5x+6}\right) = arctg\left(\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x-1}{x^2-5x+6}\right) = arctg 0 = 0$$

Zaključujemo da je x osa (odnosno prava y = 0) horizontalna asimptota. Kosa asimptota onda ne postoji.

Sad da spakujemo grafik: