1. Ispitati tok i skicirati grafik funkcije $y = \ln\dfrac{x-2}{x+1}$

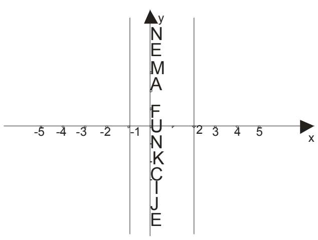
Oblast definisanosti (domen)

Sve iza ln mora da je veće od 0.

$\dfrac{x-2}{x+1} > 0$ Koristimo tablicu...

	-∞ -1	2	∞
x-2	−	−	+
x+1	−	+	+
$\dfrac{x-2}{x+1}$	+	−	+

Domen funkcije je $x \in (-\infty, -1) \cup (2, \infty)$. Ovo nam govori da funcija ne postoji između -1 i 2, na skici je to



Nule funkcije

Da vas podsetimo : $\ln\Theta = 0 \leftrightarrow \Theta = 1$

$$y = 0$$
$$\frac{x-2}{x+1} = 1$$
$$x - 2 = x + 1$$
$$-2 = 1$$

Dakle nema nule , a to nam govori da funkcija ne seče x osu.

Znak funkcije

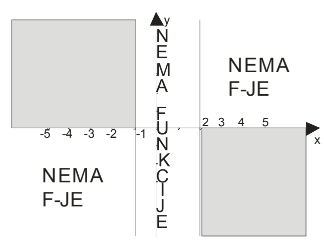
Opet malo podsećanje :

$$\ln\Theta > 0 \leftrightarrow \Theta > 1$$
$$\ln\Theta < 0 \leftrightarrow < 0 < \Theta < 1$$

Dakle:

$$y > 0$$
$$\frac{x-2}{x+1} > 1$$
$$\frac{x-2}{x+1} - 1 > 0$$
$$\frac{x-2-1(x+1)}{x+1} > 0$$
$$\frac{x-2-x-1}{x+1} > 0$$
$$\frac{-3}{x+1} > 0 \text{ pomnožimo sa -1}$$
$$\frac{3}{x+1} < 0$$
$$x+1 < 0$$
$$\boxed{x < -1}$$

Ako je y > 0 za x < -1 (grafik iznad x ose) onda je jasno da je y < 0 za x > 2 (grafik ispod x ose)



Parnost i neparnost

Funkcija nije ni parna ni neparna. To nam je jasno i iz oblasti definisanosti… Ako baš mora , onda je

$$f(-x) = \ln\frac{-x-2}{-x+1} \neq f(x)$$

Ekstremne vrednosti (max i min) i monotonost (rašćenje i opadanje)

Pazi, radi se o izvodu složene funkcije...

$$y = \ln\frac{x-2}{x+1}$$
$$y` = \frac{1}{\frac{x-2}{x+1}}\left(\frac{x-2}{x+1}\right)` = \frac{x+1}{x-2}\cdot\frac{(x-2)`(x+1)-(x+1)`(x-2)}{(x+1)^2} = \frac{\cancel{x+1}}{x-2}\cdot\frac{1(x+1)-1(x-2)}{(x+1)^{\cancel{2}}} = \frac{x+1-x+2}{(x-2)(x+1)}$$
$$y` = \frac{3}{(x-2)(x+1)}$$

y\` = 0 za 3=0 , pa zaključujemo da nema ekstremnih vrednosti.

Dalje razmišljamo od čega zavisi znak prvog izvoda? Od (x-2)(x+1).

	-∞	-1	2 ∞
x-2	−	−	+
x+1	−	+	+
y\`	+	− nema f-je	+

Ova tablica je ista kao i ona za oblast definisanosti. To nam govori da je funkcija **stalno** monotono **rastuća**.

Prevojne tačke i konveksnost i konkavnost

$$y = \ln\frac{x-2}{x+1}$$

$$y` = \frac{3}{(x-2)(x+1)} \qquad \text{pazi } \left(\frac{1}{\otimes}\right)` = -\frac{1}{\otimes^2}\cdot\otimes`$$

$$y`` = -\frac{3}{(x-2)^2(x+1)^2}[(x-2)(x+1)]`$$

$$y`` = -\frac{3}{(x-2)^2(x+1)^2}[1(x+1)+1(x-2)]$$

$$y`` = -\frac{3}{(x-2)^2(x+1)^2}(2x-1)$$

$$y`` = \frac{3(1-2x)}{(x-2)^2(x+1)^2}$$

y\`\` = 0 za 1-2x = 0 pa je $x = \frac{1}{2}$, ali **PAZI** , ova tačka **NE PRIPADA** oblasti definisanosti , pa funkcija nema prevoj.

$$y`` > 0 \to 1-2x > 0 \to x < \frac{1}{2} \to x < -1$$

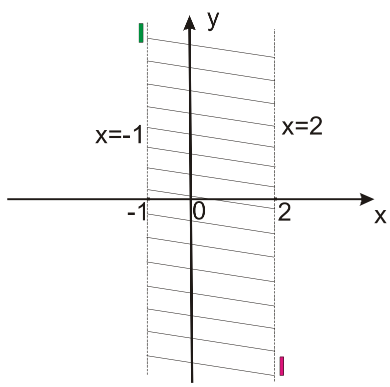
$$y`` < 0 \to 1-2x < 0 \to x > \frac{1}{2} \to x > 2$$

Asimptote funkcije (ponašanje funkcije na krajevima oblasti definisanosti)

vertikalna asimptota

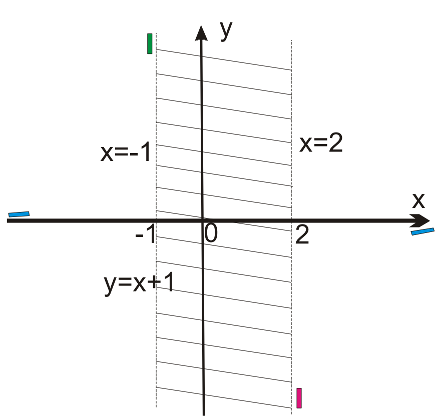
$\lim\limits_{x\to 2+\varepsilon} \ln\frac{x-2}{x+1}=$[Kako je ln neprekidna funkcija, ona može da zameni mesto sa lim]=
$\ln\frac{2+\varepsilon-2}{2+1}=\ln 0=-\infty$ (crvena crta)

$\lim\limits_{x\to -1-\varepsilon} \ln\frac{x-2}{x+1}=\ln\frac{-1-2}{-1-\varepsilon+1}=\ln\frac{-3}{-\varepsilon}=\ln\infty=\infty$ (zelena crta)



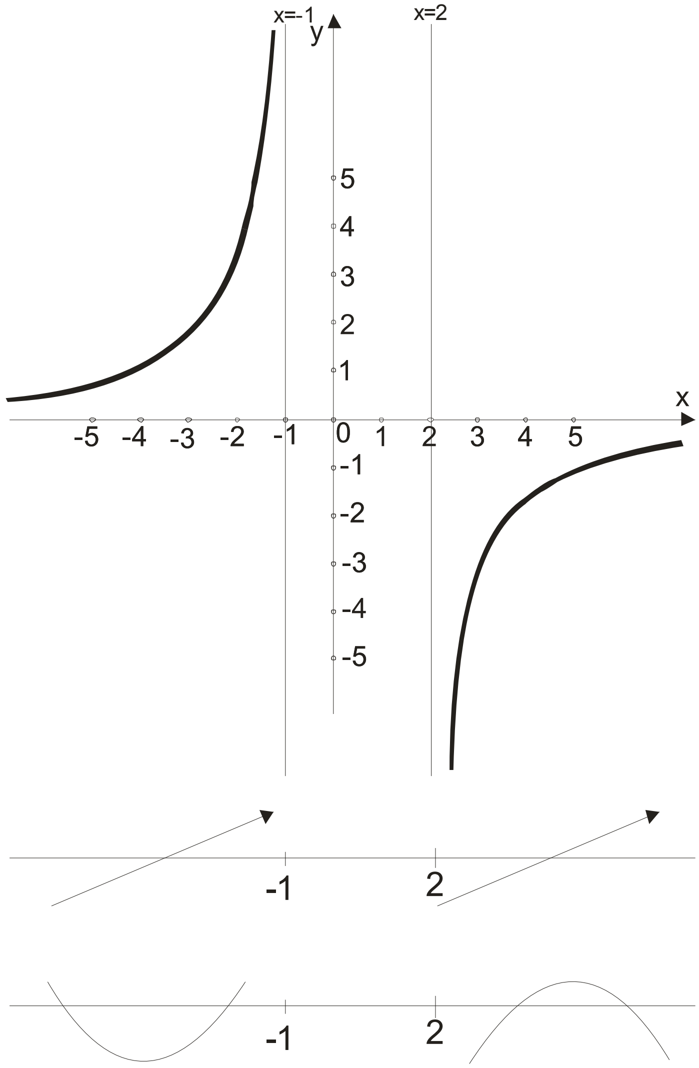
horizontalna asimptota:

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \ln\frac{x-2}{x+1}=\ln\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x-2}{x+1}=\ln 1=0$ Dakle y = 0 (x- osa) je horizontalna asimptota.(plave crtke)



Kako smo našli da horizontalna asimptota postoji, zaključujemo da nema kose asimptote.

Još da sklopimo konačan grafik...



2. Ispitati tok i skicirati grafik funkcije $y = \dfrac{1 + \ln x}{1 - \ln x}$

Oblast definisanosti (domen)

Sve iza ln mora da je veće od 0, pa je odatle x > 0.

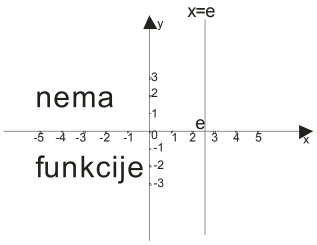
Kako imamo i razlomak, sve u imeniocu mora da je različito od 0.

$$1 - \ln x \neq 0$$
$$\ln x \neq 1$$
$$x \neq e$$

Oblast definisanosti je :

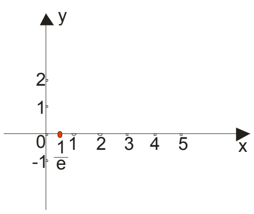
$$x \in (0, e) \cup (e, \infty)$$

Na skici, to bi izgledalo ovako:



Nule funkcije

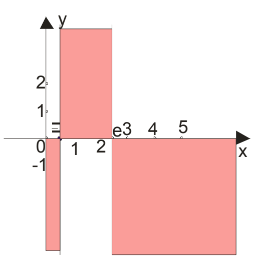
$$y = 0 \rightarrow 1 + \ln x = 0 \rightarrow \ln x = -1 \rightarrow x = e^{-1} = \frac{1}{e}$$



Znak funkcije

	0	$\frac{1}{e}=e^{-1}$	e	∞
1+lnx	−	+	+	
1-lnx	+	+	−	
y	−	+	−	

Na skici to bi izgledalo ovako:



Funkcija se nalazi samo u obeleženim oblastima.

Parnost i neparnost

Funkcija nije ni parna ni neparna. Zašto?

Pa nema smisla ni tražiti f(-x) jer funkcija nije ni definisana za x<0

Ekstremne vrednosti (max i min) i monotonost (rašćenje i opadanje)

$$y=\frac{1+\ln x}{1-\ln x}$$

$$y`=\frac{(1+\ln x)`(1-\ln x)-(1-\ln x)`(1+\ln x)}{(1-\ln x)^2}$$

$$y`=\frac{\frac{1}{x}(1-\ln x)-(-\frac{1}{x})(1+\ln x)}{(1-\ln x)^2}$$ izvučemo u brojiocu $\frac{1}{x}$ kao zajednički...

$$y`=\frac{\frac{1}{x}[(1-\ln x)+(1+\ln x)]}{(1-\ln x)^2}=\frac{1-\cancel{\ln x}+1+\cancel{\ln x}}{x\cdot(1-\ln x)^2}=\frac{2}{x\cdot(1-\ln x)^2}$$

Kako je $2\neq 0$ funkcija nema ekstremnih vrednosti.

Razmišljamo dalje: x > 0 uvek (iz oblasti definisanosti) i $(1-\ln x)^2>0$ tako da je uvek y`>0, pa je funkcija stalno **rastuća**.

Prevojne tačke i konveksnost i konkavnost

$$y=\frac{1+\ln x}{1-\ln x}$$

$$y`=\frac{2}{x\cdot(1-\ln x)^2}$$

$$y``=-\frac{2}{x^2\cdot(1-\ln x)^4}\cdot[x\cdot(1-\ln x)^2]`$$

$$y``=-\frac{2}{x^2\cdot(1-\ln x)^4}\cdot[x`\cdot(1-\ln x)^2+((1-\ln x)^2)`x]$$

$$y``=-\frac{2}{x^2\cdot(1-\ln x)^4}\cdot[1\cdot(1-\ln x)^2+2(1-\ln x)(-\frac{1}{x})x]$$

$$y``=-\frac{2}{x^2\cdot(1-\ln x)^4}\cdot[1\cdot(1-\ln x)^2+2(1-\ln x)(-1)]=-\frac{2}{x^2\cdot(1-\ln x)^4}\cdot[(1-\ln x)^2-2(1-\ln x)]$$

$$y``=-\frac{2}{x^2\cdot(1-\ln x)^{\cancel{4}}}\cdot\cancel{(1-\ln x)}[1-\ln x-2]=-\frac{2}{x^2\cdot(1-\ln x)^3}\cdot[-\ln x-1]$$

$$y``=\frac{2(1+\ln x)}{x^2\cdot(1-\ln x)^3}$$

$$y``=0\rightarrow 1+\ln x=0\rightarrow \ln x=-1\rightarrow x=e^{-1}=\frac{1}{e}$$

$$y=\frac{1+\ln e^{-1}}{1-\ln e^{-1}}=\frac{1-1}{1+1}=0$$

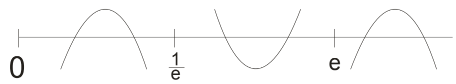
Tačka $P(\frac{1}{e},0)$ je tačka prevoja.

Od čega zavisi znak drugog izvoda?

Od 1+lnx i od 1-lnx. Idemo u tablicu…

	0	$\frac{1}{e}=e^{-1}$	e	∞
1+lnx	−	+	+	
1-lnx	+	+	−	
y``	−	+	−	

odnosno



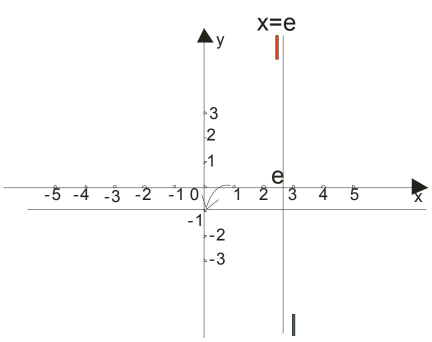
Asimptote funkcije (ponašanje funkcije na krajevima oblasti definisanosti)

<u>vertikalna asimptota</u>

$$\lim_{x\to o+\varepsilon}\frac{1+\ln x}{1-\ln x}=\frac{1+\ln(0+\varepsilon)}{1-\ln(0+\varepsilon)}=\frac{\infty}{\infty}=lopital=\lim_{x\to o+\varepsilon}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x}}=-1$$ (strelica na skici)

$$\lim_{x\to e+\varepsilon}\frac{1+\ln x}{1-\ln x}=\frac{1+\ln(e+\varepsilon)}{1-\ln(e+\varepsilon)}=\frac{2}{-\varepsilon}=-\infty$$ (zelena crta)

$$\lim_{x\to e-\varepsilon}\frac{1+\ln x}{1-\ln x}=\frac{1+\ln(e-\varepsilon)}{1-\ln(e-\varepsilon)}=\frac{2}{+\varepsilon}=+\infty$$ (crvena crta)

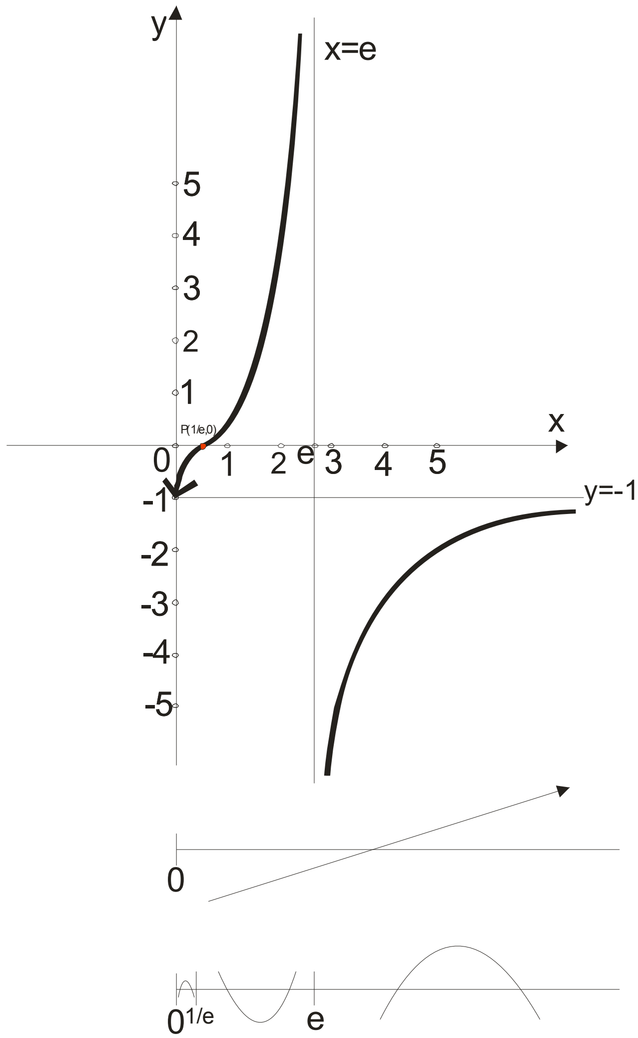


horizontalna asimptota:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1+\ln x}{1-\ln x}=\frac{\infty}{-\infty}=lopital=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x}}=-1$$

$y=-1$ je horizontalna asimptota , pa kose nema...

I da sklopimo konačan grafik


y
x=e
5
4
3
2
1
R(1/e,0)
x
0
1
2
e
3
4
5
y=-1
-1
-2
-3
-4
-5
0
0
1/e
e