GRANIČNE VREDNOSTI FUNKCIJA
(teorijske napomene)

Posmatrajmo skup $A \subseteq R$

Tačka a je **tačka nagomilavanja** skupa A ako u svakoj njenoj okolini postoji bar jedna tačka skupa A različita od a.

Neka je $A \subseteq R$ i $a \subseteq \overline{R}$ tačka nagomilavanja skupa A. Kažemo da funkcija $f : A \to R$ ima **graničnu vrednost** $b \in \overline{R}$ u tački a ako za svaki niz $\{x_n\}_{n \in N}$ za koji je $x_n \in A \setminus \{a\}$ i $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ važi da je $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = f(x_n) = b$. Tada pišemo:

$$\lim_{x\to a} f(x) = b$$

Ova definicija poznata je kao Hajneova. Sledeću definiciju dao je Koši: Neka je $A \subseteq R$ i $a \subseteq \overline{R}$ tačka nagomilavanja skupa A. kažemo da je $b \in \overline{R}$ granična vrednost funkcije $f : A \to R$ u tački a i pišemo $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ ako za svaku okolinu U(b) tačke b postoji okolina U(a) tačke a tako da važi implikacija $(\forall x \in A \setminus \{a\})(x \in U(a) \Rightarrow f(x) \in U(b))$. Naravno, ove dve definicije su ekvivalentne. Kažemo da funkcija f ima beskonačnu graničnu vrednost $+\infty(-\infty)$ u tački $a \in R$ ako za proizvoljno veliki broj $M > 0$ (proizvoljno mali broj $M < 0$) postoji $\delta > 0$ tako da važi:

$$(\forall x \in A \setminus \{a\})(|x-a| < \delta \Rightarrow f(x) > M)$$
$$\text{i } \lim_{x\to a} f(x) = +\infty$$

Odnosno:

$$(\forall x \in A \setminus \{a\})(|x-a| < \delta \Rightarrow f(x) < M)$$
$$\text{i } \lim_{x\to a} f(x) = -\infty$$

Ako funkcija f ima graničnu vrednost u tački a, onda je ta granična vrednost jednoznačno odredjena. Neka je $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ i $\lim\limits_{x\to a} g(x) = c$ gde je $a \in R$ i $b, c \in R$ tada je:

1) $\lim\limits_{x\to a} \alpha f(x) = \alpha \lim\limits_{x\to a} f(x) = \alpha b$
2) $\lim\limits_{x\to a} (f(x) \pm g(x)) = b \pm c$
3) $\lim\limits_{x\to a} [f(x) \cdot g(x)] = b \cdot c$
4) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{b}{c}, c \neq 0$
5) $\lim\limits_{x\to a} [f(x)]^k = b^k, k \in Q$
6) $\lim\limits_{x\to a} |f(x)| = |b|$

<u>Neke važne granične vrednosti:</u>

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=e$

3) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a e$ to jest: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a$ to jest: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$

<u>Lopitalovo pravilo:</u>

Ako se pri izračunavanju granične vrednosti $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ javi neodredjeni oblik $\dfrac{0}{0}$ ili $\dfrac{\infty}{\infty}$ tada koristimo pravilo Lopitala (naravno, $f(x)$ i $g(x)$ su diferencijabilne u tački $x=a$ i njenoj okolini, i $g'(a)\neq 0$). Tada je:

$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=$ ako opet dobijemo oblik $\dfrac{0}{0}$ ili $\dfrac{\infty}{\infty}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f''(x)}{g''(x)}=$ itd.

<u>PAZI:</u> Ne radi se izvod količnika već posebno izvod gore, posebno izvod dole.

<u>Odredjeni izrazi su:</u>

$\to \infty\cdot\infty=\infty$

$\to \infty+\infty=\infty$

$\to k\cdot\infty=\infty \quad (k\neq 0)$

$\to \dfrac{A}{\infty}=0$ (A je neki broj)

$\to \dfrac{A}{0}=\infty$ (A je neki broj različit od nule)

Neodredjeni izrazi (koji se najčešće javljaju) su:

$\infty-\infty=?$

$0\cdot\infty=?$

$\dfrac{\infty}{\infty}=?$

$\dfrac{0}{0}=?$