IZVODI ZADACI (III deo)

Izvodi imaju široku primenu. O upotrebi izvoda u ispitivanju toka funkcije (monotonost, ekstremne vrednosti, prevojne tačke, konveksnost i konkavnost) biće posebno reči u delu o funkcijama.

Ovde ćemo pokazati na nekoliko primera kako rešavati zadatke u kojima se traži da 'nešto' bude maksimalno ili minimalno.

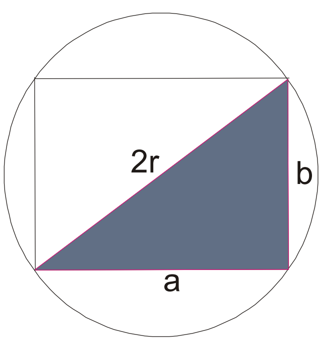
To su teži zadaci, mogu biti i **ispitni** na nekim fakultetima. Zahtevaju odlično poznavanje cele srednjoškolske matematike , moramo najčešće nacrtati sliku i postaviti problem tako što oformimo funkciju sa jednom ili dve nepoznate i od nje nađemo izvod. Kad prvi izvod izjednačimo sa nulom dobijemo traženo rešenje.

ZADACI:

1. U kružnici poluprečnika r upisan je pravougaonik maksimalne površine. Odrediti dimenzije pravougaonika i maksimalnu površinu.

Rešenje:

Najpre moramo skicirati problem i naći odgovarajuću vezu između podataka:



Znamo da se površina pravougaonika računa po formuli P = ab

Naš posao je da a ili b izrazimo preko r i to zamenimo u formuli za površinu.

Primenićemo pitagorinu teoremu na ofarbani trougao:

$(2r)^2 = a^2 + b^2$

$4r^2 = a^2 + b^2$ odavde je $a^2 = 4r^2 - b^2$ to jest $a = \sqrt{4r^2 - b^2}$

P = ab

P = $b\sqrt{4r^2 - b^2}$ **Od ove površine tražimo izvod 'po b', ali pazimo jer r moramo tretirati kao konstantu!**

P\` = b\` $\sqrt{4r^2-b^2}$ + ($\sqrt{4r^2-b^2}$)\`b   Pazi , izvod složene funkcije je ovo!

P\` = $\sqrt{4r^2-b^2}$ + $\frac{-2b}{2\sqrt{4r^2-b^2}}b$

P\`= $\sqrt{4r^2-b^2}$ + $\frac{-b^2}{\sqrt{4r^2-b^2}}$ Nadjemo zajednički...

P\` = $\frac{4r^2-b^2-b^2}{\sqrt{4r^2-b^2}}$

P\` = $\frac{4r^2-2b^2}{\sqrt{4r^2-b^2}}$ Sad ovo izjednačimo sa 0. (Samo brojilac, naravno)

P\`= 0   je za $4r^2-2b^2=0$ a odavde je b = r$\sqrt{2}$, pa to zamenimo u $a=\sqrt{4r^2-b^2}$ i dobijamo

$a=\sqrt{4r^2-2r^2}$

$a=\sqrt{2r^2}$

$a=r\sqrt{2}$ a kako smo već našli da je $b=r\sqrt{2}$ to zaključujemo da je traženi pravougaonik ustvari kvadrat čija je stranica $a=r\sqrt{2}$, pa će tražena površina biti:

$P=a^2=(r\sqrt{2})^2=2r^2$

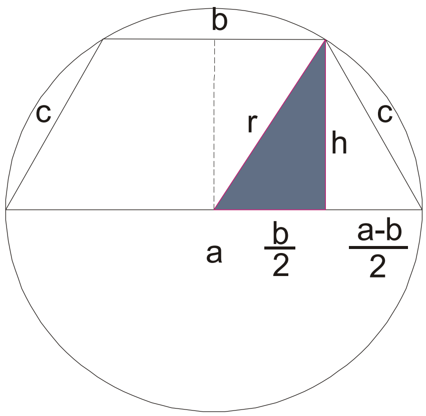
Jedna napomena: Bilo bi nam malo lakše da smo umesto funkcije P = $b\sqrt{4r^2-b^2}$ posmatrali funkciju P= $\sqrt{4b^2r^2-b^4}$ koju smo dobili kad b uvučemo pod koren. Ili još bolje da posmatramo neku funkciju , nazovimo je recimo f = $4b^2r^2-b^4$, koja ima istu maksimalnu vrednost kao i funkcija $\sqrt{4b^2r^2-b^4}$.

Još jedna napomena: Kako da znamo da je dobijeno rešenje baš maksimum, odnosno minimum?

Trebalo bi naći drugi izvod i to potvrditi jer ako je f \`\`>0 u nekoj tački , onda je ta tačka minimum a ako je f \`\`< 0 u nekoj tački ,onda je ta tačka maksimum. Ovo ispitujte ako traži Vaš profesor!

2. U polukružnici poluprečnika r upisan je trapez, čija je veća osnovica prečnik kružnice.Odrediti visinu i manju osnovicu trapeza, tako da mu površina bude maksimalna.

Rešenje:



2r = a

Površina trapeza se kao što znamo računa po formuli : $P = \frac{a+b}{2}h$

Na osenčenom trouglu ćemo primeniti pitagorinu teoremu:

$h^2 = r^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2$ pa je $h = \sqrt{r^2 - \frac{b^2}{4}}$

$P = \frac{a+b}{2}h = \frac{2r+b}{2}\sqrt{r^2 - \frac{b^2}{4}}$ malo prisredimo i dobijamo

$P = \frac{(2r+b)\sqrt{4r^2 - b^2}}{4}$ možemo odavde tražiti izvod ili je možda pametnije da prvo sve uvučemo pod koren...

$$P = \frac{\sqrt{(2r+b)^2(4r^2 - b^2)}}{4}$$

Sada možemo posmatrati samo funkciju $(2r + b)^2(4r^2 - b^2)$ koja ima istu maksimalnu vrednost kao i P.

Dakle, obeležimo sa (uzmite neko slovo) $G = (2r + b)^2(4r^2 - b^2)$ i nađimo njen izvod «po b»

$G = (2r + b)^2(4r^2 - b^2)$

$G` = 2(2r + b)(4r^2 - b^2) + (-2b)(2r + b)^2$ izvučemo zajednički...

$G` = (2r + b)[2(4r^2 - b^2) - 2b(2r + b)]$

$G` = (2r + b)[8r^2 - 2b^2 - 4rb - 2b^2]$

$G` = (2r + b)[8r^2 - 4rb - 4b^2]$

Ovo sada izjednačavamo sa 0.

G` = 0

$(2r + b)[\ 8r^2 - 4rb - 4b^2] = 0$ odavde je $2r + b= 0$ ili $8r^2 - 4rb - 4b^2= 0$

Iz $2r + b= 0$ dobijamo $b= - 2r$ što je očigledno **nemoguće**, pa dakle mora biti:

$\mathbf{8r^2 - 4rb - 4b^2= 0}$ podelimo sve sa 4

$2r^2 - rb - b^2= 0$ napravimo proizvod …(Ima objašnjeno u delu I godina,na sajtu), a može da se radi i kao kvadratna...

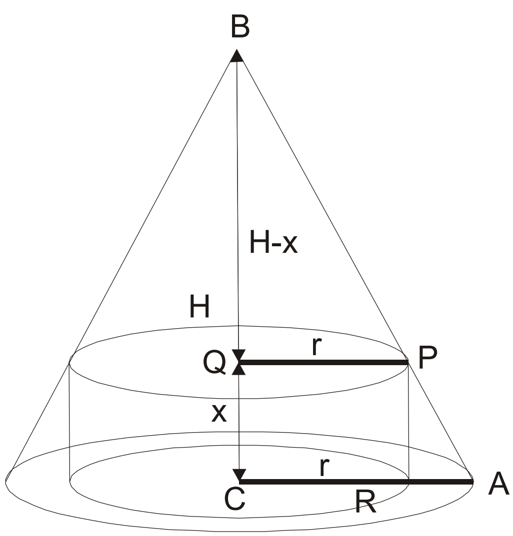
$(r - b)(b + 2r) = 0$ **Odavde je očigledno $\mathbf{r = b}$**

$h = \sqrt{r^2 - \frac{b^2}{4}}$ pa kad zamenimo $r = b$ dobijamo $h = \frac{r\sqrt{3}}{2}$

$$P = \frac{a+b}{2}h = \frac{2r+r}{2}\frac{r\sqrt{3}}{2} = \frac{3r}{2}\frac{r\sqrt{3}}{2} = \frac{3r^2\sqrt{3}}{4}$$

3. Odrediti dimenzije pravog kružnog valjka , maksimalne zapremine, koji se može upisati u pravu kružnu kupu poluprečnika R i visine H.

Rešenje:



Naravno, prvo nacrtamo sliku…

Uočimo trouglove BCA i BQP. Oni su očigledno slični, pa su odgovarajuće stranice proporcionalne:

CA : QP = BC : BQ   to jest

R : r = H : (H-x)   gde je sa **x** obeležena **visina valjka** (vidi sliku)

R(H – x) = rH

RH – Rx = rH

RH – rH = Rx   **i odavde je** $x = \frac{(R-r)H}{R}$

Znamo da se zapremina valjka računa po formuli : $V = r^2 \pi H_v$ to jest ,pošto smo visinu obeležili sa x

$V = r^2 \pi x$

$V = r^2 \pi \frac{(R-r)H}{R}$ sredimo ovo i nadjimo izvod po r

$V = \frac{(r^2R - r^3)H\pi}{R}$ **Pazi , kad radimo izvod po r , sve ostale nepoznate su "kao" konstante!**

$V` = \frac{(2rR - 3r^2)H\pi}{R}$    sada ovo izjednačimo sa 0 .  Dakle V` = 0 za $\frac{(2rR - 3r^2)H\pi}{R} = 0$ to jest

$2rR - 3r^2 = 0$

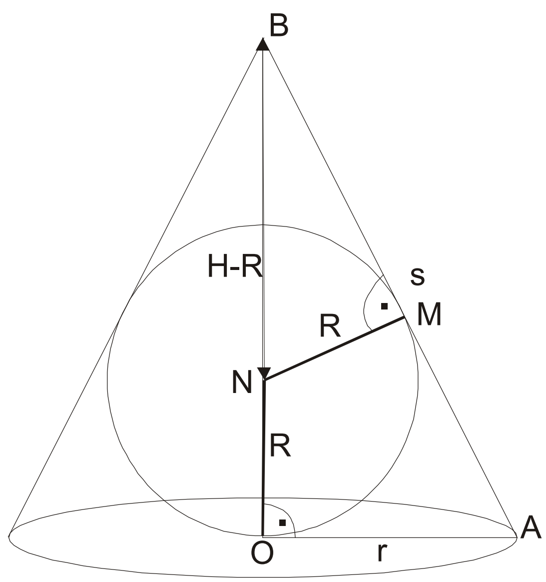
$r(2R - 3r) = 0$ pa je odavde $r = \frac{2R}{3}$, vratimo ovo u $x = \frac{(R-r)H}{R}$ i dobijamo $x = \frac{H}{3}$

$V_{max} = (\frac{2R}{3})^2 \pi \frac{H}{3} = \frac{4R^2H\pi}{27}$

4. Među svim pravim kupama opisanim oko lopte poluprečnika R , odrediti onu čija je zapremina minimalna.

Rešenje:

Kao i obično, prvo moramo nacrtati sliku:



Uočimo trouglove OAB i MNB. Oni su slični jer imaju po dva ista ugla. Iz njihove sličnosti sledi proporcionalnost odgovarajućih stranica.

OA : MN = AB : BN Znamo da je $s^2 = r^2 + H^2$ to jest $s = \sqrt{r^2 + H^2}$

$r : R = \sqrt{r^2 + H^2} : (H - R)$

$r(H - R) = R\sqrt{r^2 + H^2}$ kvadriramo…

$r^2(H - R)^2 = R^2(r^2 + H^2)$ sredimo i izrazimo H...

$$H = \frac{2r^2 R}{r^2 - R^2}$$

Zapremina kupe se računa po formuli : $V = \frac{1}{3} r^2 \pi H$ Ovde zamenimo H što smo izrazili...

$V = \frac{1}{3} r^2 \pi H$

$V = \frac{1}{3} r^2 \pi \frac{2r^2 R}{r^2 - R^2}$ malo prisredimo...

$V = \frac{2\pi}{3} \frac{r^4 R}{r^2 - R^2}$ odavde tražimo izvod po r i pazimo, jer je R kao konstanta i u pitanju je izvod količnika!

$V` = \frac{2\pi}{3} \frac{4r^3 R(r^2 - R^2) - 2r(r^4 R)}{(r^2 - R^2)^2}$

$V` = \frac{2\pi}{3} \frac{4r^5 R - 4r^3 R^3 - 2r^5 R}{(r^2 - R^2)^2}$

$V` = \frac{2\pi}{3} \frac{2r^5 R - 4r^3 R^3}{(r^2 - R^2)^2}$ naravno $V` = 0$

$2r^5R - 4r^3R^3 = 0$ pa je odavde

$2r^3R(r^2-2R^2) = 0$ to jest $r^2-2R^2 = 0$ pa je $\mathbf{r = \sqrt{2}\,R}$**, vratimo se da nadjemo H**

$H = \frac{2r^2 R}{r^2 - R^2} = 4R$, dakle **H = 4R**

$V = \frac{1}{3} r^2 \pi H$ kad zamenimo r i H dobijamo:

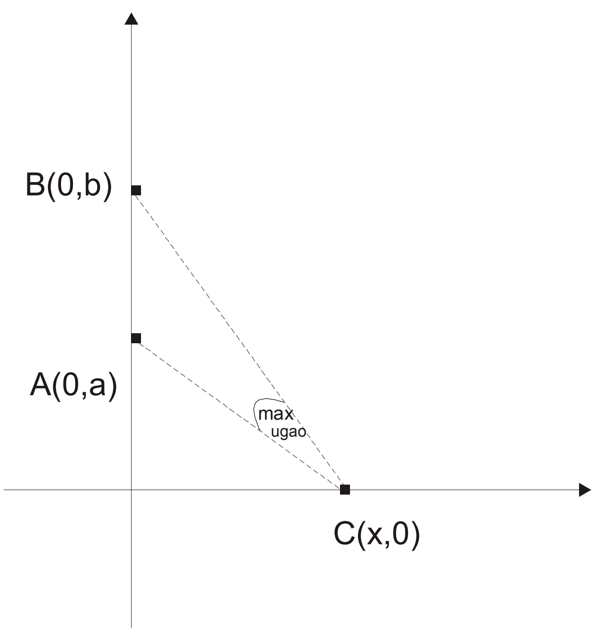
$V_{min} = \frac{1}{3} (\sqrt{2}\,\mathbf{R})^2 \pi 4R$

$\mathbf{V_{min}} = \frac{8\pi}{3} \mathbf{R^3}$

5. **Date su tačke A(0,a) i B(0,b), gde je 0 < a < b. Odredi koordinatu x tačke C(x,0) gde je x > 0 tako da se duž AB vidi pod maksimalnim uglom iz tačke C.**

Rešenje:

I ovde ćemo najpre nacrtati sliku i postaviti problem:



Ideja je da koristimo formulicu za ugao između dve prave $tg\alpha = \dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}$.

Naći ćemo koeficijente pravca za pravu AC i za pravu BC.

Iskoristićemo formulicu $k = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

Za pravu AC je $k_1 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{0 - a}{x - 0} = -\dfrac{a}{x}$

Za pravu BC je $k_2 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{0 - b}{x - 0} = -\dfrac{b}{x}$

Sada je $tg\alpha = \dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} = \dfrac{-\frac{b}{x} + \frac{a}{x}}{1 + \frac{a}{x}\frac{b}{x}}$ = sredimo = $\dfrac{x(a-b)}{x^2 + ab}$ znači da je :

$tg\alpha = \dfrac{x(a-b)}{x^2 + ab}$ odnosno $\alpha = \mathrm{arctg}\dfrac{x(a-b)}{x^2 + ab}$ Sad od ovog tražimo izvod:

$$\alpha = \mathrm{arctg}\frac{x(a-b)}{x^2 + ab}$$

$$\alpha` = \frac{1}{1 + \left(\frac{x(a-b)}{x^2 + ab}\right)^2}\left(\frac{x(a-b)}{x^2 + ab}\right)^`$$

$$\alpha` = \frac{1}{\frac{(x^2 + ab)^2 + x^2(a-b)^2}{(x^2 + ab)^2}}(a-b)\frac{x^2 + ab - 2x^2}{(x^2 + ab)^2}$$ pokratimo i spakujemo

$$\alpha` = \frac{(a-b)(ab - x^2)}{(x^2 + ab)^2 + x^2(a-b)^2}$$ Sad ovo izjednačimo sa 0, naravno samo brojilac!

ab – x^2= 0 pa je x^2= ab odnosno traženo rešenje je x = $\sqrt{ab}$

Dakle koordinata x je geometrijska sredina koordinata a i b !

ZA RADOZNALE: POGLEDAJ PROBLEM “SLIKA NA ZIDU” I PRIMENI OVO REŠENJE!