**PARNOST i NEPARNOST FUNKCIJE**
**PERIODIČNOST FUNKCIJE**

***PARNOST i NEPARNOST FUNKCIJE***

**Ako je** $f(-x)=f(x)$ **funkcija je parna i tada je grafik simetričan u odnosu na** ***y*** **osu**

**Ako je** $f(-x)=-f(x)$ **funkcija je neparna i tada je grafik simetričan u odnosu na koordinatni početak**

**Šta mi u zadatku konkretno radimo?**

Krenemo od $f(-x)$ i gde vidimo $x$ stavimo $-x$, to malo sredimo , možemo dobiti da je sve jednako:

i) $f(x)$ i onda kažemo da je funkcija parna

ii) $-f(x)$ i onda kažemo da je funkcija neparna

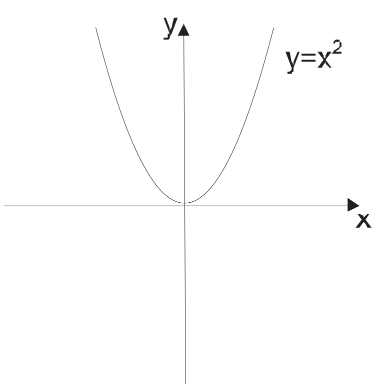
iii) nijedno od ova dva ( onda kažemo da funkcija nije ni parna ni neparna)

Kad profesori objašnjavaju deci parnost i neparnost funkcije, najčešće kao primer navode : $y=x^2$ i $y=x^3$

**Za** $y=x^2$ ( znamo da je $y=f(x)$ , pa prvo $y$ zamenimo sa *f(x)*)

$f(x)=x^2$

$\underline{\underline{f(-x)}}=(-x)^2=x^2=\underline{\underline{f(x)}}$ Znači da je ova funkcija parna. Pogledajmo to i na grafiku:

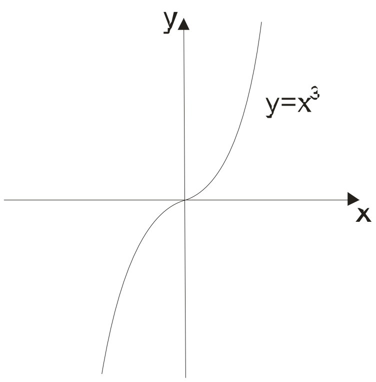



Vidimo da je grafik **simetričan u odnosu na y osu.**

**Za** $y=x^3$

$f(x)=x^3$

$\underline{\underline{f(-x)}}=(-x)^3=-x^3=-\underline{\underline{f(x)}}$ Znači da je ova funkcija parna. Pogledajmo i nju na grafiku:




Grafik je simetričan u odnosu na koordinatni početak!

Evo još nekoliko primera :

**1. Ispitati parnost i neparnost sledećih funkcija:**

a) $y=\frac{x^2-1}{x^2+1}$

b) $y=\frac{2x^3}{x^2-4}$

v) $y=\frac{x^2+4x-5}{x-4}$

**Rešenje:**

a) $y=\frac{x^2-1}{x^2+1}$

$$f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+1}$$

$$f(-x)=\frac{(-x)^2-1}{(-x)^2+1}=\frac{x^2-1}{x^2+1}=f(x)\rightarrow parna$$

b) $y=\frac{2x^3}{x^2-4}$

$$f(x)=\frac{2x^3}{x^2-4}$$

$$f(-x)=\frac{2(-x)^3}{(-x)^2-4}=\frac{-2x^3}{x^2-4}=-\frac{2x^3}{x^2-4}=-f(x)\rightarrow neparna$$

v) $y=\dfrac{x^2+4x-5}{x-4}$

$$f(x)=\frac{x^2+4x-5}{x-4}$$

$$f(-x)=\frac{(-x)^2+4(-x)-5}{-x-4}=\frac{x^2-4x-5}{-x-4}\rightarrow nije\ \ ni\ \ parna\ \ ni\ \ neparna$$

**2. Ispitati parnost i neparnost sledećih funkcija:**

**a)** $y=\dfrac{1}{\ln(x+3)-1}$

**b)** $y=\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}$

**v)** $y=\sqrt{1-e^{-x^2}}$

**Rešenje:**

**a)** $y=\dfrac{1}{\ln(x+3)-1}$

**Kod ln funkcija najčešće se desi da funkcija nije ni parna ni neparna, zbog oblasti definisanosti.**

Za ovu našu funkciju oblast definisanosti je:

$\ln(x+3)-1\neq 0\rightarrow \ln(x+3)\neq 1\rightarrow x+3\neq e\rightarrow x\neq e-3$ ( zbog razlomka)

$x+3>0\rightarrow x>-3$ ( zbog ln funkcije)

Pa je domen: $D_f=(-3,e-3)\cup(e-3,\infty)$

U ovoj i sličnim situacijama napišete:

Oblast definisanosti funkcije nije simetrična u odnosu na koordinatni početak pa nema smisla govoriti o parnosti i neparnosti.To jest, **funkcija nije ni parna ni neparna!**

**b)** $y=\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}$

$$f(-x)=\arcsin\frac{2(-x)}{1+(-x)^2}=\arcsin\frac{-2x}{1+x^2}=-\arcsin\frac{2x}{1+x^2}=-f(x)\rightarrow neparna$$

Naravno, od pre znamo da je $\arcsin(-\Theta)=-\arcsin\Theta$ .

**v)** $y=\sqrt{1-e^{-x^2}}$

$$f(-x)=\sqrt{1-e^{-(-x)^2}}=\sqrt{1-e^{-x^2}}=f(x)\rightarrow parna$$

**3. Data je funkcija** $f(x)=\dfrac{(1+a^x)^2}{a^x}$**. Dokazati da je parna.**

**Rešenje:**

$$f(-x)=\frac{(1+a^{-x})^2}{a^{-x}}=\frac{(1+\frac{1}{a^x})^2}{\frac{1}{a^x}}=\frac{(\frac{a^x+1}{a^x})^2}{\frac{1}{a^x}}=\frac{\frac{(a^x+1)^2}{\left(a^x\right)^2}}{\frac{1}{a^x}}=\frac{\cancel{a^x}(a^x+1)^2}{\left(a^x\right)^{\cancel{2}}}=\frac{(1+a^x)^2}{a^x}=f(x)\rightarrow parna$$

**4. Data je funkcija** $f(x)=\log\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$**. Dokazati da je neparna.**

**Rešenje:**

$$f(x)=\log\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$$
$$f(-x)=\log\left(-x+\sqrt{1+(-x)^2}\right)=\log\left(-x+\sqrt{1+x^2}\right)=\log\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)$$

Sad izvršimo racionalizaciju unutar logaritma.

$$f(-x)=\log\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)=\log\left(\frac{\sqrt{1+x^2}-x}{1}\cdot\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}+x}\right)=$$

$$=\log\left(\frac{\left(\sqrt{1+x^2}\right)^2-x^2}{\sqrt{1+x^2}+x}\right)=\log\left(\frac{1\cancel{+x^2}\cancel{-x^2}}{\sqrt{1+x^2}+x}\right)=\log\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+x}\right)=\log\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^{-1}$$

Imamo pravilo za logaritme: $\log_A B^n=n\log_A B$, pa je:

$$f(-x)=\log\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^{-1}=-\log\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)=-f(x)\rightarrow neparna$$

***PERIODIČNOST FUNKCIJE***

Periodičnost se odnosi na trigonometrijske funkcije.

Najčešće periodičnost nije lako odrediti, traži poznavanje trigonometrije na " naprednom nivou" , zato vam predlažemo da se detaljno podsetite trigonometrijskih funkcija ( Ima sve detaljno u II godina ).

Mi ćemo da vas podsetimo da se kod $y = a\sin(bx+c) \wedge y = a\cos(bx+c)$ perioda traži po formuli $\omega = \frac{2\pi}{b}$, gde je $b$ broj koji se nalazi ispred x ( naravno , kad sklopimo funkciju u ovom obliku).

Kod $y = a\cdot tg(bx+c) \wedge y = a\cdot ctg(bx+c)$ perioda je $\omega = \frac{\pi}{b}$.

Evo nekoliko primera:

**5. Odrediti osnovni period za funkcije:**

**a)** $y = \sin x \cdot \cos x$

**b)** $y = \sin x + \cos x$

**v)** $y = \sin^4 x + \cos^4 x$

**Rešenje:**

**a)** $y = \sin x \cdot \cos x$

Da najpre upakujemo zadatu funkciju:

$$y = \sin x \cdot \cos x = \frac{2}{2}\sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2}\boxed{2\sin x \cos x} = \frac{1}{2}\sin 2x$$

Odavde vidimo da je broj ispred x-sa b=2.

$\omega = \frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi}{2} = \pi \rightarrow \boxed{\omega = \pi}$ je osnovna perioda ove funkcije.

**b)** $y = \sin x + \cos x$

$$y = \sin x + \cos x = \frac{2}{\sqrt{2}}\left(\sin x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \cos x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\left(\sqrt{2}\right)^{\cancel{2}}}{\cancel{\sqrt{2}}}\left(\underbrace{\boxed{\sin x \cdot \cos\frac{\pi}{4} + \cos x \cdot \sin\frac{\pi}{4}}}_{\text{ovo je adiciona formulica}}\right)$$

$$y = \sqrt{2}\left(\sin(x+\frac{\pi}{4})\right)$$

Odavde je b=1 pa je $\omega = \frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi \rightarrow \boxed{\omega = 2\pi}$

**v)** $y=\sin^4 x+\cos^4 x$

Ovde ćemo krenuti od osnovne identičnosti:

$$\sin^2 x+\cos^2 x=1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots()^2$$
$$\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)^2=1^2$$
$$\sin^4 x+2\sin^2 x\cos^2 x+\cos^4 x=1$$
$$\sin^4 x+\cos^4 x+\frac{4}{2}\sin^2 x\cos^2 x=1$$
$$\sin^4 x+\cos^4 x+\frac{1}{2}\sin^2 2x=1$$
$$\sin^4 x+\cos^4 x=1-\frac{1}{2}\sin^2 2x$$
$$\sin^4 x+\cos^4 x=1-\frac{1}{2}\left(\frac{1-\cos 4x}{2}\right)$$
$$\sin^4 x+\cos^4 x=1-\frac{1}{4}+\frac{\cos 4x}{4}$$
$$\sin^4 x+\cos^4 x=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cos 4x$$

Mi dakle posmatramo funkciju:

$$y=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cos 4x$$

Ovde je b=4 pa je $\omega=\frac{2\pi}{b}=\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}\rightarrow\boxed{\omega=\frac{\pi}{2}}$