KOMPOZICIJA FUNKCIJA

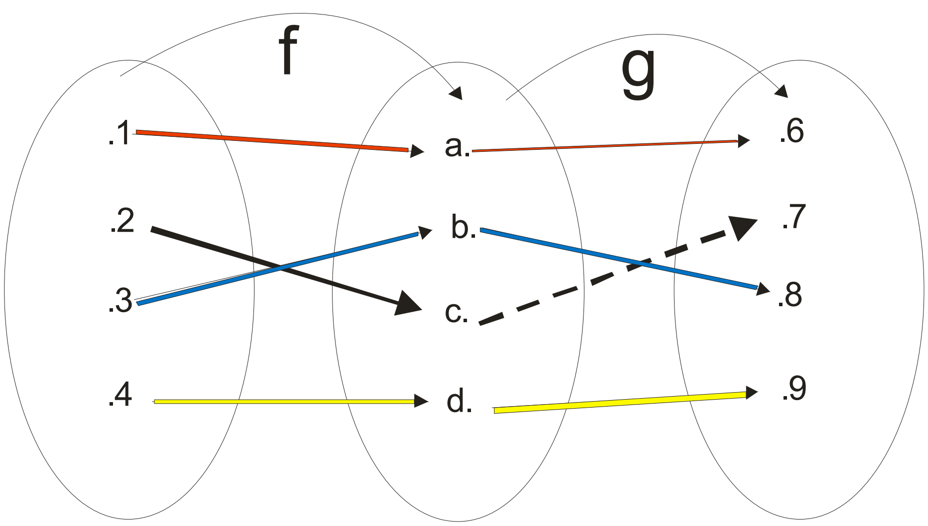
Neka su $f: A \to B$ i $g: B \to C$ funkcije. Tada sa $g \circ f$ označavamo kompoziciju (proizvod) preslikavanja f i g, i definišemo ga sa $(\forall x \in A)\ ((g \circ f)(x) = g(f(x))$. Na ovaj način smo ustvari dobili preslikavanje $g \circ f : A \to C$ (kompozicija se najčešće obeležava sa $\circ$, a čita se " **kružić**"

primer 1.

Date su funkcije $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ a & c & b & d \end{pmatrix}$ **i** $g = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 6 & 8 & 7 & 9 \end{pmatrix}$ **odrediti** $(g \circ f)(x)$

Rešenje:

Ajmo najpre da ovo predstavimo dijagramom da vidimo šta se zapravo dešava a onda ćemo ispisati i rešenje:



Za svaki element radimo posebno:

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(f(1)) = g(\mathrm{a}) = 6$ Na slici uočite ***crvene*** strelice.

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(f(2)) = g(c) = 7$ Na slici uočite ***crne*** strelice.

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(f(3)) = g(b) = 8$ Na slici uočite ***plave*** strelice.

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(f(4)) = g(d) = 9$ Na slici uočite ***žute*** strelice.

primer 2.

Ako je $f=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ c & a & b & d \end{pmatrix}$, $g=\begin{pmatrix} p & q & r & s \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ **i** $h=\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ r & p & q & s \end{pmatrix}$ odrediti:

a) $f \circ g = ?$

b) $g \circ h = ?$

c) $(g \circ h) \circ f = ?$

Rešenje:

a) $f \circ g = ?$

Kako je $f=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ c & a & b & d \end{pmatrix}$ i $g=\begin{pmatrix} p & q & r & s \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$,idemo redom:

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(g(p)) = f(1) = c$

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(g(q)) = f(4) = d$

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(g(r)) = f(3) = b$

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(g(s)) = f(2) = a$

Odavde imamo da je: $f \circ g = \begin{pmatrix} p & q & r & s \\ c & d & b & a \end{pmatrix}$

b) $g \circ h = ?$

$g=\begin{pmatrix} p & q & r & s \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ i $h=\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ r & p & q & s \end{pmatrix}$, pa je :

$(g \circ h)(x) = g(h(x)) = g(h(a)) = g(r) = 3$

$(g \circ h)(x) = g(h(x)) = g(h(b)) = g(p) = 1$

$(g \circ h)(x) = g(h(x)) = g(h(c)) = g(q) = 4$

$(g \circ h)(x) = g(h(x)) = g(h(d)) = g(s) = 2$

Pa je : $g \circ h = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

c) $(g \circ h) \circ f = ?$

Slično radimo , samo što sada imamo tri funkcije u kompoziciji:

$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ c & a & b & d \end{pmatrix}$, $h = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ r & p & q & s \end{pmatrix}$ $g = \begin{pmatrix} p & q & r & s \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

$[(g \circ h) \circ f](x) = g(h(f(x)))$ Prvo radimo *f*, pa *h* i na kraju *g*...

Ovako smemo da radimo jer važi asocijativni zakon $(g \circ h) \circ f = g \circ (h \circ f)$. Dakle:

$[(g \circ h) \circ f](x) = g(h(f(x))) = g(h(f(1)) = g(h(c)) = g(q) = 4$

$[(g \circ h) \circ f](x) = g(h(f(x))) = g(h(f(2)) = g(h(a)) = g(r) = 3$

$[(g \circ h) \circ f](x) = g(h(f(x))) = g(h(f(3)) = g(h(b)) = g(p) = 1$

$[(g \circ h) \circ f](x) = g(h(f(x))) = g(h(f(4)) = g(h(d)) = g(s) = 2$

Ova kompozicija je $(g \circ h) \circ f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

primer 3.

Date su funkcije $f(x) = 3x - 2$ i $g(x) = 5x + 7$. Odrediti:

a) $f \circ g$
b) $g \circ f$
c) $f \circ f$
d) $g \circ g$

Rešenje:

Ovo je drugi tip zadatka vezan za kompoziciju funkcija.

a) $f \circ g$

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) =$ Sad zamenimo funkciju koja je " unutra", znači $g(x)$

$(f \circ g)(x) = f(\boxed{g(x)}) = f(5x+7) =$ nadjemo kako izgleda funkcija *f* ($f(x) = 3\boxed{x} - 2$) i gde vidimo x stavimo sve iz zagrade...

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(5x+7) = 3\boxed{(5x+7)} - 2$ i još da ovo malo prisredimo...

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(5x+7) = 3(5x+7) - 2 = 15x + 21 - 2 = 15x + 19$

b) $g \circ f$

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) =$ opet prvo zamenimo funkciju unutar...

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(3x-2)$, sad posmatramo funkciju g i gde vidimo x stavimo sve iz zagrade...

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(3x-2) = 5(3x-2)+7$ opet malo sredimo...

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(3x-2) = 5(3x-2)+7 = 15x-10+7 = 15x-3$

c) $f \circ f$

$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(3x-2) = 3(3x-2)-2 = 9x-6-2 = 9x-8$

d) $g \circ g$

$(g \circ g)(x) = g(g(x)) = g(5x+7) = 5(5x+7)+7 = 25x+35+7 = 25x+42$

primer 4. Date su funkcije $f(x+1) = 5x-3$ i $g(2x-3) = 3x+1$. Odrediti:

a) $f \circ g$

b) $g^{-1} \circ f^{-1}$

Rešenje:

Ovo je zadatak u kome vas profesor proverava sve tri stvari: funkcionalnu jednačinu, inverznu funkciju i kompoziciju funkcija.

Prvo da nadjemo *f(x)* i *g(x)*.

$$
\begin{aligned}
&f(x+1) = 5x-3 \\
&x+1 = t \\
&x = t-1 \\
&f(t) = 5(t-1)-3 \\
&f(t) = 5t-5-3 \\
&f(t) = 5t-8 \rightarrow \boxed{f(x) = 5x-8}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&g(2x-3) = 3x+1 \\
&2x-3 = t \\
&2x = t+3 \\
&x = \frac{t+3}{2} \\
&g(t) = 3\frac{t+3}{2}+1 \\
&g(t) = \frac{3t+9+2}{2} \\
&g(t) = \frac{3t+11}{2} \rightarrow \boxed{g(x) = \frac{3x+11}{2}}
\end{aligned}
$$

Dalje tražimo inverzne funkcije:

$$f(x)=5x-8$$
$$y=5x-8$$
$$5x=y+8$$
$$x=\frac{y+8}{5}\rightarrow \boxed{f^{-1}(x)=\frac{x+8}{5}}$$

$$g(x)=\frac{3x+11}{2}$$
$$y=\frac{3x+11}{2}$$
$$3x+11=2y$$
$$3x=2y-11$$
$$x=\frac{2y-11}{3}\rightarrow \boxed{g^{-1}(x)=\frac{2x-11}{3}}$$

Sada možemo naći:

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(\frac{3x+11}{2})=5\cdot\frac{3x+11}{2}-8=\frac{15x+55-16}{2}=\boxed{\frac{15x+39}{2}}$$

$$(g^{-1}\circ f^{-1})(x)=g^{-1}(f^{-1}(x))=g^{-1}(\frac{x+8}{5})=\frac{2\cdot\frac{x+8}{5}-11}{3}=\frac{\frac{2x+16-55}{5}}{3}=\frac{\frac{2x-39}{5}}{\frac{3}{1}}=\boxed{\frac{2x-39}{15}}$$