POLINOMI ZADACI

1. **Odrediti realne brojeve *a* i b tako da** $x=1+i$ **bude nula polinoma** $P(x)=3x^4+ax^3+bx^2+4x-2$
   A zatim naći i ostale nule.
   Rešenje:
   Znamo iz teorije da ako je jedna nula polinoma kompleksan broj , onda je druga nula njegov konjugovano kompleksan broj.
   Znači da $x_1=1+i \to x_2=1-i$
   Dalje znamo da je polinom uvek deljiv sa $(x-x_1)$ **, odnosno sa** $(x-x_1)(x-x_2)$ **.**
   Da nadjemo najpre koliko je ovo za naš primer:

$$(x-x_1)(x-x_2)=(x-(1+i))(x-(1-i))=(x-1-i)(x-1+i)$$
$$=\left((x-1)^2-i^2\right)$$
$$=\left(x^2-2x+1+1\right)$$
$$=x^2-2x+2$$

Sad se vraćamo na deljenje (tu budite pažljivi)

$$\left(3x^4+ax^3+bx^2+4x-2\right):\left(x^2-2x+2\right)=3x^2$$
$$\underline{\pm 3x^4 \mp 6x^3 \pm 6x^2}$$
$$(a+6)x^3+(b-6)x^2+4x-2$$

Obavili smo prvi korak u deljenju , pažljivo radimo dalje….

$$\left(3x^4+ax^3+bx^2+4x-2\right):\left(x^2-2x+2\right)=3x^2+(a+6)x$$
$$\underline{\pm 3x^4 \mp 6x^3 \pm 6x^2}$$
$$(a+6)x^3+(b-6)x^2+4x-2$$
$$\underline{\pm\ (a+6)x^3 \mp 2(a+6)x^2 \pm 2(a+6)x}$$
$$(b-6+2a+12)x^2+(4-2a-12)x-2 \to \text{ovo malo sredimo}$$
$$(2a+b+6)x^2+(-2a-8)x-2 \to \text{sad tek idemo dalje}$$

Još jedan korak:

$$\left(3x^4+ax^3+bx^2+4x-2\right):\left(x^2-2x+2\right)=3x^2+(a+6)x+(2a+b+6)$$
$$\underline{\pm 3x^4 \mp 6x^3 \pm 6x^2}$$
$$(a+6)x^3+(b-6)x^2+4x-2$$
$$\underline{\pm\ (a+6)x^3 \mp 2(a+6)x^2 \pm 2(a+6)x}$$
$$(2a+b+6)x^2+(-2a-8)x-2$$
$$\underline{\pm(2a+b+6)x^2 \mp 2(2a+b+6)x \pm 2(2a+b+6)}$$
$$\left((-2a-8)+2(2a+b+6)\right)x-2-2(2a+b+6) \to \text{sredimo}$$
$$(2a+2b+4)x\ -4a-2b-14$$

Ovaj ostatak mora biti nula, pa dobijamo sistem:

$$\left.\begin{array}{l} 2a+2b+4\ \ =0 \\ \underline{-4a-2b-14=0} \end{array}\right\}+$$

$$-2a-10=0 \to \boxed{a=-5}$$

$$-10+2b+4=0 \to \boxed{b=3}$$

Da bi našli i ostale nule, vratimo nadjene parametre u deljenje koje smo radili:

$$\left(3x^4-5x^3+3x^2+4x-2\right):\left(x^2-2x+2\right)=3x^2+(-5+6)x+(2(-5)+3+6)$$

$$=3x^2+x-1$$

Sad jednostavno rešimo ovu kvadratnu jednačinu:

$$3x^2+x-1=0$$

$$x_{3,4}=\frac{-1\pm\sqrt{1+12}}{6}$$

$$\boxed{x_{3,4}=\frac{-1\pm\sqrt{13}}{6}}$$

DRUGI NAČIN da se reši ovaj zadatak, bez deljenja polinoma, koje je malo zeznuto, je da koristimo Bezuovu teoremu i da menjamo umesto x dva rešenja koja imamo:

$$P(x)=3x^4+ax^3+bx^2+4x-2$$

$$P(1+i)=3(1+i)^4+a(1+i)^3+b(1+i)^2+4(1+i)-2=0$$

$$P(1-i)=3(1-i)^4+a(1-i)^3+b(1-i)^2+4(1-i)-2=0$$

Sad bi ovo morali da sredimo malo:

$$(1+i)^4=\left((1+i)^2\right)^2=(1+2i+i^2)^2=(1+2i-1)^2=(2i)^2=4i^2=-4$$

$$(1+i)^3=(1+i)^2(1+i)=2i(1+i)=2i-2$$

$$\underline{(1+i)^2=2i}$$

$$(1-i)^4=\left((1-i)^2\right)^2=(1-2i+i^2)^2=(1-2i-1)^2=(-2i)^2=4i^2=-4$$

$$(1-i)^3=(1-i)^2(1-i)=-2i(1-i)=-2i-2$$

$$\underline{(1-i)^2=-2i}$$

Dalje imamo:

$$3(1+i)^4+a(1+i)^3+b(1+i)^2+4(1+i)-2=0$$

$$\underline{3(1-i)^4+a(1-i)^3+b(1-i)^2+4(1-i)-2=0}$$

$$\left.\begin{array}{l} 3(-4)+a(2i-2)+b\cdot 2i+4(1+i)-2=0 \\ \underline{3(-4)+a(-2i-2)+b\cdot\left(-2i\right)+4(1-i)-2=0} \end{array}\right\}+$$

$$-24-4a+8-4=0$$

$$-4a=20 \to a=-5$$

sad se vratimo u bilo koju od ove dve jednačine i nadjemo $b=3$

2. Odrediti vrednost parametra *a* u polinomu $2x^3 - x^2 - 7x + a = 0$ **tako da je zbir dva korena jednačine jednak 1 .**

Rešenje:

Čim se u zadatku pomene neka veza izmedju korena, to je znak da treba da koristimo Vietova pravila

$$Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{B}{A}$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{C}{A}$$

$$x_1x_2x_3 = -\frac{D}{A}$$

$$2x^3 - x^2 - 7x + a = 0$$

$$A = 2$$

$$B = -1$$

$$C = -7$$

$$D = a$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = \frac{1}{2}$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{-7}{2}$$

$$x_1x_2x_3 = -\frac{a}{2}$$

U zadatku nam je dato da je $x_1 + x_2 = 1$ **pa to ubacimo u prvu od ove tri formulice:**

$$x_1 + x_2 + x_3 = \frac{1}{2} \rightarrow 1 + x_3 = \frac{1}{2} \rightarrow \boxed{x_3 = -\frac{1}{2}}$$

Sad uzmemo drugu da malo prisredimo:

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{-7}{2}$$

$$x_1x_2 + x_1\left(-\frac{1}{2}\right) + x_2\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{-7}{2}$$

$$x_1x_2 + \left(-\frac{1}{2}\right)\underbrace{(x_1 + x_2)}_{\text{ovo je 1}} = \frac{-7}{2}$$

$$x_1x_2 + \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{-7}{2} \rightarrow x_1x_2 = \frac{-7}{2} + \frac{1}{2} \rightarrow \boxed{x_1x_2 = -3}$$

I konačno , iskoristimo i treću formulicu:

$$x_1x_2x_3 = -\frac{a}{2} \rightarrow -3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{a}{2} \rightarrow \boxed{a = -3}$$

3. Odredi ostatak pri deljenju polinoma $P(x)=x^{2008}-3\cdot x^{2007}+2$ sa $Q(x)=x^2-4x+3$.

Rešenje:

Najpre zaključimo da će ostatak biti oblika $R(x)=ax+b$, jer delimo sa x^2-4x+3

Možemo zapisati :

$P(x)=Q(x)\cdot(\text{neki polinom})+R(x)$

Obeležimo ovaj „neki polinom“ sa recimo S(x)-on nam u zadatku ništa ne znači.

$P(x)=Q(x)\cdot S(x)+R(x)$

Dalje ćemo naći nule polinoma $Q(x)=x^2-4x+3$

$x^2-4x+3=0$

$x_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{16-12}}{2}=\frac{4\pm 2}{2}$

$\left.\begin{matrix} x_1=3 \\ x_2=1 \end{matrix}\right\} \to x^2-4x+3=(x-3)(x-1)$

Sad imamo :

$P(x)=Q(x)\cdot S(x)+R(x)$

$P(x)=(x-3)(x-1)\cdot S(x)+\left(ax+b\right)$

$x^{2008}-3\cdot x^{2007}+2=(x-3)(x-1)\cdot S(x)+\left(ax+b\right)$

Sad ovde menjamo: prvo x=3, a zatim x=1

$\underline{\text{za x = 3}}$

$x^{2008}-3\cdot x^{2007}+2=(x-3)(x-1)\cdot S(x)+\left(ax+b\right)$

$3^{2008}-3\cdot 3^{2007}+2=(3-3)(3-1)\cdot S(3)+\left(a\cdot 3+b\right)$

$3^{2008}-3^{2008}+2=0\cdot 2\cdot S(3)+\left(a\cdot 3+b\right)$

$2=3a+b$

$\boxed{3a+b=2}$

$\underline{\text{za x =1}}$

$x^{2008}-3\cdot x^{2007}+2=(x-3)(x-1)\cdot S(x)+\left(ax+b\right)$

$1^{2008}-3\cdot 1^{2007}+2=(1-3)(1-1)\cdot S(x)+\left(a\cdot 1+b\right)$

$1-3+2=-2\cdot 0\cdot S(x)+\left(a\cdot 1+b\right)$

$0=a+b$

$\boxed{a+b=0}$

Sad rešimo ovaj sistem jednačina:

$\left.\begin{matrix} 3a+b=2 \\ a+b=0 \end{matrix}\right\} -$

$2a=2\to a=1\to b=-1$

$R(x)=1x-1\to \boxed{R(x)=x-1}$

4. Ako polinom P(x) pri deljenju sa x-1 daje ostatak 6 a pri deljenju sa x+2 daje ostatak -3, odrediti ostatak pri deljenju sa (x-1)(x+2).

Rešenje:

Najpre da postavimo zadatak:

Ako polinom P(x) pri deljenju sa x-1 daje ostatak 6 nam govori :

$P(x)=(x-1)\cdot(\text{neki polinom})+6$

To jest:

$P(x)=(x-1)\cdot S_1(x)+6$

A pri deljenju sa x+2 daje ostatak -3 nam govori:

$P(x)=(x+2)\cdot(\text{neki polinom})-3$

To jest:

$P(x)=(x+2)\cdot S_2(x)-3$

Ostatak pri deljenju sa (x-1)(x+2) će biti oblika ***R(x) = ax + b***

$P(x)=(x-1)(x+2)\cdot S_3(x)+\left(ax+b\right)$

Zapišimo sad ove tri jednakosti jednu ispod druge:

$P(x)=(x-1)\cdot S_1(x)+6$

$P(x)=(x+2)\cdot S_2(x)-3$

$P(x)=(x-1)(x+2)\cdot S_3(x)+\left(ax+b\right)$

Iz prve saznajemo da je:

$P(x)=(x-1)\cdot S_1(x)+6$

$P(1)=(1-1)\cdot S_1(1)+6\rightarrow \boxed{P(1)=6}$

Iz druge je :

$P(x)=(x+2)\cdot S_2(x)-3$

$P(-2)=(-2+2)\cdot S_2(x)-3\rightarrow \boxed{P(-2)=-3}$

Sad ove zaključke iskoristimo :

$P(x)=(x-1)(x+2)\cdot S_3(x)+\left(ax+b\right)$

$P(1)=(1-1)(1+2)\cdot S_3(1)+\left(a\cdot 1+b\right)=6\rightarrow \boxed{a+b=6}$

$P(x)=(x-1)(x+2)\cdot S_3(x)+\left(ax+b\right)$

$P(-2)=(-2-1)(-2+2)\cdot S_3(-2)+\left(a\cdot(-2)+b\right)=-3\rightarrow \boxed{-2a+b=-3}$

Rešimo sistem:

$$\left.\begin{array}{l} a+b=6 \\ \underline{-2a+b=-3} \end{array}\right\}\rightarrow a=3, b=3$$

$R(x)=ax+b\rightarrow \boxed{R(x)=3x+3}$

5. Ako je polinom $P(x)=6x^4-7x^3+mx^2+3x+2$ deljiv polinomom $Q(x)=x^2-x+n$, odrediti koeficijente m i n.

Rešenje:

Ovde nemamo izbora, moramo odmah krenuti u deljenje:

$$\left(6x^4-7x^3+mx^2+3x+2\right):\left(x^2-x+n\right)=6x^2$$
$$\underline{\pm 6x^4 \mp 6x^3 \pm 6nx^2}$$
$$-x^3+(m-6n)x^2+3x+2$$

Drugi korak:

$$\left(6x^4-7x^3+mx^2+3x+2\right):\left(x^2-x+n\right)=6x^2-x$$
$$\underline{\pm 6x^4 \mp 6x^3 \pm 6nx^2}$$
$$-x^3+(m-6n)x^2+3x$$
$$\underline{\mp x^3 \pm x^2 \mp nx}$$
$$(m-6n-1)x^2+(3+n)x+2$$

I poslednji korak:

$$\left(6x^4-7x^3+mx^2+3x+2\right):\left(x^2-x+n\right)=6x^2-x+(m-6n-1)$$
$$\underline{\pm 6x^4 \mp 6x^3 \pm 6nx^2}$$
$$-x^3+(m-6n)x^2+3x$$
$$\underline{\mp x^3 \pm x^2 \mp nx}$$
$$(m-6n-1)x^2+(3+n)x+2$$
$$\underline{\pm(m-6n-1)x^2 \mp (m-6n-1)x \pm n(m-6n-1)}$$
$$(3+n+m-6n-1)x+2-n(m-6n-1) \to ostatak$$
$$\underbrace{(2+m-5n)}_{=0}x+\underbrace{2-n(m-6n-1)}_{=0}$$

Oformimo sistem:

$$2+m-5n=0 \to m=5n-2$$
$$\underline{2-n(m-6n-1)=0}$$
$$2-n(5n-2-6n-1)=0$$
$$2-n(-n-3)=0$$
$$n^2+3n+2=0$$
$$n_1=-1 \to m_1=5(-1)-2=-7$$
$$n_2=-2 \to m_2=5(-2)-2=-12$$