NIZOVI – TEORIJSKE NAPOMENE

Niz je funkcija $a: N \to R$ a najčešće se obeležava sa $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...) = (a_n)$.

Niz (a_n) je monotono rastući (**rastući**) ako za svako $n \in N$ važi $a_{n+1} > a_n$

Niz (a_n) je monotono opadajući (**opadajući**) ako za svako $n \in N$ važi $a_{n+1} < a_n$

Niz (a_n) je monotono neopadajući (**neopadajući**) ako za svako $n \in N$ važi $a_{n+1} \geq a_n$

Niz (a_n) je monotono nerastući (**nerastući**) ako za svako $n \in N$ važi $a_{n+1} \leq a_n$

Niz (a_n) je **ograničen odozgo** ako postoji broj $M \in R$ tako da je $a_n \leq M, \quad \forall n \in N$

Najmanji takav broj M naziva se **supremum** niza. $\sup(a_n)$

Niz (a_n) je **ograničen odozdo** ako postoji broj $m \in R$ tako da je $a_n \geq m, \quad \forall n \in N$

Najveći takav broj m naziva se **infinum** niza. $\inf(a_n)$

Niz je **ograničen** ako je ograničen i odozdo i odozgo.

Broj $a \in R$ je **granična vrednost niza** $\left(a_n\right)$ **,** u oznaci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, ako i samo ako

$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in N)$ tako da za $(\forall n \geq n_0)$ važi nejednakost $|a_n - a| < \varepsilon$

Ako takav broj a postoji, onda kažemo da je niz $\left(a_n\right)$ **konvergentan** i da konvergira ka a .

Zapisujemo $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$

Ako takav broj a ne postoji, onda kažemo da niz $\left(a_n\right)$ **nije konvergentan** , to jest da je **divergetan**.

Razlikujemo odredjeno i neodredjeno divergentne nizove.

Niz $\left(a_n\right)$ teži ka $+\infty$ ako $(\forall M > 0)(\exists n_0 \in N)$ takav da je $a_n > M, \forall n \geq n_0$

Zapisujemo $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$

Niz $\left(a_n\right)$ teži ka $+\infty$ ako $(\forall M>0)(\exists n_0 \in N)$ takav da je $a_n < -M, \forall n \geq n_0$

Zapisujemo $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$

Nizovi koji divergiraju ka + ili – beskonačno nazivaju se **odredjeno divergentni nizovi**.

Nizovi koji nisu ni konvergentni ni odredjeno divergentni nazivaju se **neodredjeno divergentni nizovi**.

Ako je niz konvergentan, onda je njegova granica jedinstvena.

Monotono rastući niz ograničen odozgo konvergira svom supremumu.

Monotono opadajući niz ograničen odozdo konvergira svom infinumu.

Ako zahtev da se u svakoj epsilon okolini nalaze skoro svi članovi niza (konvergentan niz) oslabimo utoliko što zahtevamo da se nalazi `samo` beskonačno mnogo njih, dolazimo do pojma tačka nagomilavanja.

Broj $A \in R$ je **tačka nagomilavanja** niza $\left(a_n\right)$, ako

$(\forall \varepsilon>0)(\forall n_0 \in N)$ $(\exists n \in N, n \geq n_0)$ takav da je $\left|a_n - A\right| < \varepsilon$

Svaki ograničen niz ima bar jednu tačku nagomilavanja. (Bolcano-Vajerštras)

Pazite, granična vrednost niza je i njegova tačka nagomilavanja, dok obrnuto ne mora da važi!

Osobine konvergentnih nizova

$$\lim_{n\to\infty}\left(C \cdot a_n\right) = C \cdot \lim_{n\to\infty} a_n \quad \text{gde je C konstanta}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(a_n \pm b_n\right) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(a_n \bullet b_n\right) = \lim_{n\to\infty} a_n \bullet \lim_{n\to\infty} b_n$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} \quad \text{za } \lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$$

Ako za nizove $(a_n),(b_n),(c_n)$, važi $a_n \le b_n \le c_n$ i ako je $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = A$ onda je i $\lim_{n\to\infty} b_n = A$

Ovo je takozvana teorema o sendviču.

Teorema (Stolz) Neka su (a_n) i (b_n) nizovi takvi da je (b_n) strogo rastući i neograničen. Ako postoji

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n},$$

tada postoji i $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$ i

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}.$$

Iz ove teoreme se izvuče posledica koja se često koristi u zadacima:

Neka je (a_n) konvergentan niz takav da je $a_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Tada je

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdots a_n} = \lim_{n\to+\infty} a_n.$$

Neodredjeni izrazi

Postoji sedam osnovnih neodređenih oblika. To su:

$$\frac{\infty}{\infty}\,,\ \frac{0}{0}\,,\ +\infty-\infty\,,\ 0\cdot\infty\,,\ 1^{\infty}\,,\ 0^0\,,\ \infty^0\,.$$

Odredjeni izrazi

$\infty + \infty = \infty$

$\frac{A}{\infty} = 0,$ naravno ako $A \ne \infty$

$\frac{A}{0} = \infty,$ naravno ako $A \ne 0$

$\infty \cdot \infty = \infty$

$A \cdot \infty = \infty,$ naravno ako $A \ne 0$

Još je korisno zapamtiti:

Faktorijel raste brže od eksponencijalne funkcije:

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n!} = 0,\ a \in \mathbb{R};}$$

eksponencijalna funkcija raste brže od potencije:

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{n^p}{a^n} = 0,\ a > 1,\ p > 0;}$$

faktorijel raste brže od potencije:

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{n^p}{n!} = 0,\ a > 1,\ p > 0.}$$

Dalje, evo nekih značajnih limesa:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1,\ a > 0 \qquad \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^{\beta n} = e^{\alpha\beta}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{\alpha}{f(n)}\right)^{\beta f(n)} = e^{\alpha\beta}$, za svaki niz funkcijskih vrednosti $f(n)$ koji divergira prema $\pm\infty$

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 0, & 0 \le |q| < 1 \\ 1, & q = 1 \\ +\infty, & q > 1 \end{cases}$$

I za kraj evo tablice limesa, koja će verujemo biti od koristi studentima:

(jeste vezana za granične vrednosti funkcija ali radi i kad umesto x stavimo n)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sh} x}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{ch} x-1}{x^2}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a \qquad (a>0)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^a-1}{x}=a \qquad (a\in\mathbb{R})$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^p}{a^x}=0 \qquad (p\in\mathbb{R},\ a>1)$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_m x^m+a_{m-1}x^{m-1}+\cdots+a_1x+a_0}{b_nx^n+b_{n-1}x^{n-1}+\cdots+b_1x+b_0}=\begin{cases}\frac{a_m}{b_n} & \text{kada je } m=n\\ 0 & \text{kada je } m<n\\ \pm\infty & \text{kada je } m>n\end{cases}$$

$$(m,n\in\mathbb{N}_0,\quad a_0,\ldots,a_m,b_0,\ldots,b_n\in\mathbb{R},\quad a_m,b_n\neq 0)$$

www.matematiranje.in.rs