<u>Aritmetički niz:</u>

Podjimo od dva primera:

Primer 1: $3,5,7,9,11,...$

Primer 2: $55,50,45,40,...$

Nije teško zaključiti da će u prvom primeru nekoliko sledećih članova biti 13,15,17,… jer se svaki sledeći član povećava za dva. U drugom primeru će nekoliko sledećih članova biti 35,30,25,… jer se svaki sledeći smanjuje za 5. Kako vidimo , niz može biti rastući ili opadajući.

Ovakvi nizovi u kojima je razlika ma koja dva uzastopna člana konstantna nazivaju se **<u>aritmetički nizovi</u>** ili aritmetičke progresije.

Vrlo je važno od kog broja počinje niz, pa se on zove **<u>prvi član niza</u>** i obeležava se sa a_1.

Za primer $3,5,7,9,11,... \rightarrow$ prvi član niza je $a_1 = 3$

Za primer $55,50,45,40,... \rightarrow$ prvi član niza $a_1 = 55$

Razlika (diferencija) niza je broj za koji se niz povećava (smanjuje) i obeležava se slovom d .

$d = a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = ... = a_n - a_{n-1}$

Za primer $3,5,7,9,11,... \rightarrow d = 2$ (raste niz)

Za primer $55,50,45,40,... \rightarrow d = -5$ (opada niz)

Nekad će nam biti potrebno da nadjemo stoti, hiljaditi ili bilo koji drugi član niza. Slažete se da je naporno pisati ih redom. **Tu nam pomaže formula za n-ti član niza:**

$$\boxed{a_n = a_1 + (n-1)d}$$

Ako trebamo <u>sabrati prvih n-članova niza,tu važi formula:</u>

$$\boxed{S_n = \frac{n}{2}\left[2a_1 + (n-1)d\right]} \quad \text{ili} \quad S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

Za svaki aritmetički niz još važi (**aritmetička sredina**) :

$$\boxed{a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}} \quad \text{ili} \quad a_n = \frac{a_{n-j} + a_{n+j}}{2} \qquad j = 2,...,n-1$$

Ako izmedju brojeva a i b treba umetnuti (interpolirati) k-brojeva tako da zajedno sa a i b čine aritmetički niz, onda razliku d tog niza tražimo po formuli $d = \frac{b-a}{k+1}$

Zadaci:

1) Peti član aritmetičkog niza je 19 a deseti član niza je 39. Odrediti niz.

Rešenje: $a_5 = 19$
$a_{10} = 39$

Aritmetički niz je potpuno odredjen ako znamo prvi član a_1 i razliku d. Da bi našli ove 2 nepoznate primenićemo formulu za n-ti član niza:

$a_n = a_1 + (n-1)d$ za $n = 5 \Rightarrow a_5 = a_1 + 4d = 19$

za $n = 10 \Rightarrow a_{10} = a_1 + 9d = 39$

Sastavićemo sistem jednačina:

$$\begin{aligned} a_1 + 4d &= 19 /\cdot(-1) \\ a_1 + 9d &= 39 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -a_1 - 4d &= -19 \\ +\ a_1 + 9d &= 39 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5d &= 20 \\ d &= 4 \rightarrow \end{aligned}$$ vratimo se u jednu od jednačina

$$\begin{aligned} a_1 + 4d &= 19 \\ a_1 + 16 &= 19 \\ a_1 &= 3 \end{aligned}$$

Znači prvi član niza je 3 a povećava se za 4 pa je niz: 3,7,11,15,19,...

Njegov opšti član će biti:

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (n-1)d \\ a_n &= 3 + (n-1)\cdot 4 \\ a_n &= 4n - 1 \end{aligned}$$

2) *Nadji prvi član a_1 i diferenciju d aritmetičkom nizu ako je :*

$a_2 + a_5 - a_3 = 10$ i $a_2 + a_9 = 17$

<u>Rešenje:</u> Ovakav tip zadatka rešavamo pomoću opšteg člana:

$$a_n = a_1 + (n-1)d \rightarrow \begin{array}{l} a_2 = a_1 + d \\ a_5 = a_1 + 4d \\ a_3 = a_1 + 2d \\ a_9 = a_1 + 8d \end{array}$$

Zamenimo ovo u 2 date jednačine:

$$a_2 + a_5 - a_3 = 10$$
$$\underline{a_2 + a_9 = 17}$$

$$(a_1 + d) + (a_1 + 4d) - (a_1 + 2d) = 10$$
$$\underline{(a_1 + d) + (a_1 + 8d) = 17}$$

$$a_1 + d + a_1 + 4d - a_1 - 2d = 10$$
$$\underline{a_1 + d + a_1 + 8d = 17}$$

$$a_1 + 3d = 10 \rightarrow \textit{pomnožimo} \text{ sa -2}$$
$$\underline{2a_1 + 9d = 17}$$

$$-2a_1 - 6d = -20$$
$$\underline{2a_1 + 9d = 17}$$

$$3d = -3$$
$$d = -1$$

$$a_1 + 3d = 10$$
$$a_1 - 3 = 10$$
$$a_1 = 13$$

Znači niz je opadajući i glasi 13,12,11,10,9,8,7,…

3) *Odrediti aritmetički niz ako je:* $5a_1 + 10a_5 = 0$ *i* $S_4 = 14$

Rešenje:

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$
$$a_5 = a_1 + 4d$$
$$5a_1 + 10(a_1 + 4d) = 0$$
$$5a_1 + 10a_1 + 40d = 0$$
$$15a_1 + 40d = 0$$
$$\boxed{3a_1 + 8d = 0}$$

$$S_4 = 14$$
$$S_n = \frac{n}{2}\left[2a_1 + (n-1)d\right]$$
$$S_4 = \frac{4}{2}\left[2a_1 + (4-1)d\right]$$
$$14 = 2\left[2a_1 + 3d\right]$$
$$\boxed{2a_1 + 3d = 7}$$

Sad ove dve jednačine "upakujemo" :

$$3a_1 + 8d = 0 / \cdot 2$$
$$2a_1 + 3d = 7 / \cdot (-3)$$

$$6a_1 + 16d = 0$$
$$-6a_1 - 9d = -21$$

$$7d = -21$$
$$d = -3$$
$$3a_1 + 8d = 0 \Rightarrow 3a_1 - 24 = 0$$
$$3a_1 = 24$$
$$a_1 = 8$$

Znači niz je : 8,5,2,-1,-4,…

4) *Izračunati* n *i* a_n *u aritmetičkoj progresiji za koje su:* $a_1 = 2$, $d = 5$, $S_n = 245$

Rešenje:

Znači ovde nam treba n…

$$S_n = \frac{n}{2}\left[2a_1 + (n-1)d\right]$$
$$245 = \frac{n}{2}\left[2 \cdot 2 + (n-1) \cdot 5\right]$$
$$245 = \frac{n}{2}\left[4 + 5n - 5\right]$$
$$490 = n\left[5n - 1\right]$$
$$490 = 5n^2 - n$$
$$5n^2 - n - 490 = 0$$

Dobili smo kvadratnu jednačinu "po n".

$$a = 5, b = -1, c = -490$$

$$n_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
$$n_{1,2} = \frac{1 \pm 99}{10}$$
$$n_1 = 10,\ \cancel{n_2 = -\frac{98}{10}}$$

Nemoguće

Znači : $n = 10$ je jedino rešenje

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$
$$a_{10} = 2 + (10-1) \cdot 5$$
$$a_{10} = 2 + 45$$
$$\boxed{a_{10} = 47}$$

5) Zbir prva tri člana aritmetičkog niza je 36, a zbir kvadrata prva tri člana je 482. Odrediti niz.

Rešenje:

Da postavimo problem:

$$a_1 + a_2 + a_3 = 36$$
$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 482$$

Iskoristićemo da je

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$
$$a_2 = a_1 + d$$
$$a_3 = a_1 + 2d$$

$$a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) = 36$$
$$a_1^2 + (a_1 + d)^2 + (a_1 + 2d)^2 = 482$$

$3a_1 + 3d = 36$ Odavde ćemo izraziti a_1 i zameniti u drugu jednačinu sistema

$$a_1 + d = 12$$

.

$$\boxed{a_1 = 12 - d}$$

$$(12-d)^2 + (12-d+d)^2 + (12-d+2d)^2 = 482$$
$$(12-d)^2 + 12^2 + (12+d)^2 = 482$$
$$144 - 24d + d^2 + 144 + 144 + 24d + d^2 = 482$$
$$2d^2 + 432 = 482$$
$$2d^2 = 50$$
$$d^2 = 25$$
$$d = \pm\sqrt{25} \to d = \pm 5$$

$\underline{Za \quad d = 5}$

$$a_1 = 12 - 5$$
$$a_1 = 7$$

$\underline{Za \quad d = -5}$

$$a_1 = 12 + 5$$
$$a_1 = 17$$

Dakle, postoje 2 takva niza:

7,12,17,22,27,…

17,12,7,2,-3,…

6) Rešiti jednačinu: $3+7+11+...+x=210$

Rešenje:

Uočimo najpre da se ovde radi o zbiru prvih n članova aritmetičkog niza i da je :

$$a_1=3$$
$$a_2=7$$
$$a_n=x$$
$$S_n=210$$

$$a_1=3$$
$$d=4$$
$$S_n=210$$

$$x=a_n=?$$

$$S_n=\frac{n}{2}\left[2a_1+(n-1)d\right]$$

$$210=\frac{n}{2}\left[2\cdot 3+(n-1)\cdot 4\right]$$

$$210=\frac{n}{2}\left[6+4n-4\right]$$

$$210=\frac{n}{2}\left[4n+2\right]$$

$$210=2n^2+n$$

$$2n^2+n-210=0$$

Kvadratna "po n"

$$n_{1,2}=\frac{-1\pm 41}{4}$$

$$n_1=10$$

$$\cancel{n_2=-\frac{42}{4}}$$

Dakle $n=10$

$$x=a_{10}=a_1+9d=3+9\cdot 4=3+36=39$$

$$\boxed{x=39}$$

7) Aritmetički niz ima 20 članova. Zbir članova koji su na parnim mestima je 250, a zbir članova na neparnim mestima 220. Naći dva srednja člana.

Rešenje:

Postavimo prvo problem:

$$a_2 + a_4 + a_6 + ... + a_{20} = 250$$
$$a_1 + a_3 + ... + a_{19} = 220$$

Na ovaj način smo ustvari dobili 2 niza sa po 10 članova čiji su zbirovi : za prvi 250 i za drugi 220, a kod oba dva niza je razlika 2d.

Primenićemo formula za $S_n = \frac{n}{2}\left[2a_1 + (n-1)d\right]$

$$S_{10} = \frac{10}{2}\left[2a_2 + (10-1)\cdot 2d\right] \to \text{ jer mu je prvi član } a_2$$

$$250 = 5\left[2a_2 + 18d\right]$$

Za prvi niz $\Rightarrow$ $2a_2 + 18d = 50$

$$a_2 + 9d = 25 \wedge a_2 = a_1 + d \to a_1 + d + 9d = 25$$

$$\boxed{a_1 + 10d = 25}$$

$$S_{10} = \frac{10}{2}\left[2a_1 + (10-1)\cdot 2d\right]$$

Za drugi niz $\Rightarrow$ $220 = 5\left[2a_1 + 18d\right]$

$$2a_1 + 18d = 44$$

$$\boxed{a_1 + 9d = 22}$$

Sad pravimo sistem:

$$a_1 + 10d = 25$$
$$a_1 + 9d = 22 /\cdot(-1)$$

$$a_1 + 10d = 25$$
$$-a_1 - 9d = -22$$

Pa je $\boxed{d = 3} \Rightarrow a_1 + 30 = 25 \Rightarrow \boxed{a_1 = -5}$

Znači niz je : -5,-2,1,4,7,...

Srednji članovi su a_{10} i a_{11}

$$a_{10} = a_1 + 9d = -5 + 27 = 22$$
$$a_{11} = a_1 + 10d = -5 + 30 = 25$$

8) Izmedju brojeva -5 i 30 umetnuti aritmetički niz od šest članova. Koliki je zbir svih osam članova?

Rešenje:

U ovom zadatku ćemo iskoristiti formulu : $d = \frac{b-a}{k+1}$

$a = -5$
$b = 30$ $\quad d = \frac{30-(-5)}{6+1} = \frac{35}{7} = 5$
$k = 6$

Niz je -5,0,5,10,15,20,25,30 pa je $a_1 = -5$ i $a_8 = 30$

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

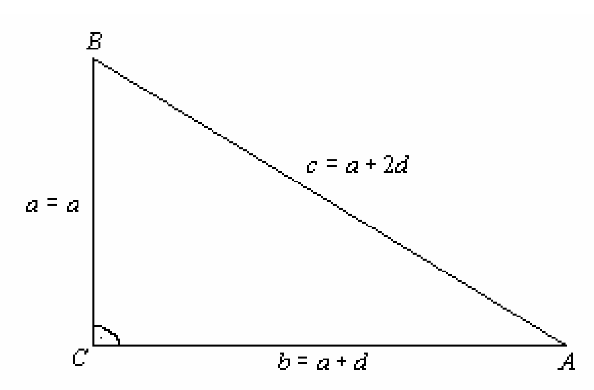
$$S_8 = \frac{8(-5+30)}{2} = 4 \cdot 25 = 100$$

Dakle $S_8 = 100$

9) Stranice pravouglog trougla su uzastopni članovi aritmetičkog niza za koji je d=3. Odredi dužine tih stranica.

Rešenje:

Važi pitagorina teorema: $a^2 + b^2 = c^2$



Pošto je $d = 3$

$a = a$

$b = a + d = a + 3$

$c = a + 2d = a + 6$

Zamenimo ovo u Pitagorinu teremu:

$a^2 + b^2 = c^2$

$a^2 + (a+3)^2 = (a+6)^2$

$a^2 + a^2 + 6a + 9 = a^2 + 12a + 36$

$a^2 + 6a + 9 - 12a - 36 = 0$

$a^2 - 6a - 27 = 0$

$a_{1,2} = \frac{6 \pm 12}{2}$

$a_1 = 9,$

$\cancel{a_2 = -3}$

-3 nije rešenje, jer dužina stranice ne može da bude negativan broj.

Dužine stranica su:

$a = 9$

$b = a + 3 = 9 + 3 = 12$

$c = a + 6 = 9 + 6 = 15$

10) Odrediti x tako da brojevi log2, log(2^x -1), log(2^x +3) budu uzastopni članovi aritmetičkog niza.

Rešenje:

Upotrebićemo aritmetičku sredinu $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$ tj, $a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2}$

$$\underset{a_1}{\log 2}, \underset{a_2}{\log(2^x - 1)}, \underset{a_3}{\log(2^x + 3)}$$

$$\log(2^x - 1) = \frac{\log 2 + \log(2^x + 3)}{2}$$

$$2\log(2^x - 1) = \log 2 \cdot (2^x + 3)$$

$$\log(2^x - 1)^2 = \log 2 \cdot (2^x + 3)$$

$$(2^x - 1)^2 = 2 \cdot (2^x + 3) \ldots\ldots smena \quad 2^x = t$$

$$(t-1)^2 = 2(t+3)$$

$$t^2 - 2t + 1 = 2t + 6$$

$$t^2 - 4t - 5 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{4 \pm 6}{2}$$

$$t_1 = 5$$

$$t_2 = -1$$

Vratimo se u smenu:

$2^x = 5$ ili $2^x = -1$

$\boxed{x = \log_2 5}$ nemoguće