Tačka i prava- razni zadaci

Primer 1.

Date su tri tačke A(1,3), B(3,y) i C(-4,-2) . Odrediti y tako da tri date tačke leže na istoj pravoj.

Rešenje:

Ako tačke leže na istoj pravoj onda je površina trougla koji one grade jednaka 0.

Možemo izvesti i kao neku malu formulicu

$$P=\frac{1}{2}\left|\left(x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)\right)\right|=0$$

$$x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)=0$$

$$x_1(y_2-y_1+y_1-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)=0 \text{ U prvoj zagradi kao trikče } -y_1+y_1$$

$$\underline{x_1(y_2-y_1)}\underline{\underline{-x_1(y_3-y_1)}}+\underline{\underline{x_2(y_3-y_1)}}\underline{-x_3(y_2-y_1)}=0 \text{ izvučemo zajednički}$$

$$(y_2-y_1)(x_1-x_3)+(y_3-y_1)(x_2-x_1)=0$$

$$(y_3-y_1)(x_2-x_1)=-(y_2-y_1)(x_1-x_3)$$

$$(y_3-y_1)(x_2-x_1)=(y_2-y_1)(x_3-x_1)$$

$$\boxed{\frac{y_3-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x_3-x_1}{x_2-x_1}}$$

Za naš zadatak imamo A(1,3), B(3,y) i C(-4,-2)

$$\frac{y_3-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x_3-x_1}{x_2-x_1}$$

$$\frac{-2-3}{y-3}=\frac{-4-1}{3-1}$$

$$\frac{-5}{y-3}=\frac{-5}{2}\rightarrow y=5$$

Primer 2.

Date su tačke A(2,-4), B(7,6) i C(12,1). Tačka M deli stranicu AB u razmeri 2:3 , a tačka N stranicu BC u razmeri 3:2. Odrediti površinu trapeza ACMN.

Rešenje:

Najpre ćemo naći koordinate tačaka M i N preko formule za podelu duži u datom odnosu.

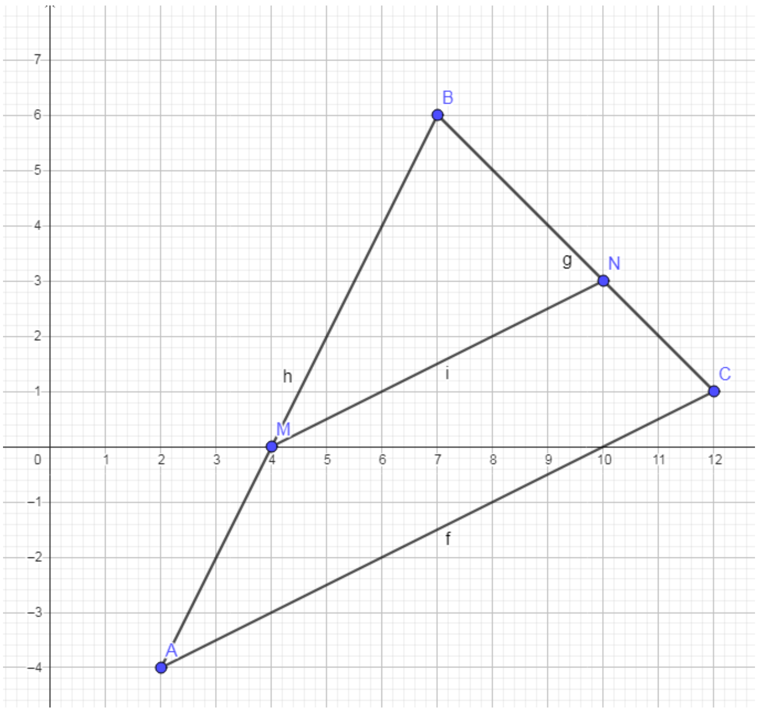
$$x_\lambda=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}\wedge y_\lambda=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$$

Za tačke A(2,-4), B(7,6) imamo $\lambda = \frac{2}{3}$ pa je:

$$x_\lambda = \frac{2+\frac{2}{3}\cdot 7}{1+\frac{2}{3}} = \frac{\frac{20}{3}}{\frac{5}{3}} = 4 \wedge y_\lambda = \frac{-4+\frac{2}{3}\cdot 6}{1+\frac{2}{3}} = \frac{\frac{0}{3}}{\frac{5}{3}} = 0$$ Koordinate tačke M(4,0)

Za tačke B(7,6) i C(12,1) imamo $\lambda = \frac{3}{2}$

$$x_\lambda = \frac{7+\frac{3}{2}\cdot 12}{1+\frac{3}{2}} = \frac{\frac{50}{2}}{\frac{5}{2}} = 10 \wedge y_\lambda = \frac{6+\frac{3}{2}\cdot 1}{1+\frac{3}{2}} = \frac{\frac{15}{2}}{\frac{5}{2}} = 3$$ Koordinate tačke N(10,3)



Od površine trougla ABC ćemo oduzeti površinu trougla MNB i tako dobiti površinu trapeza ACNM.

Za trougao ABC je:

$$P = \frac{1}{2}\left|\left(x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)\right)\right|$$

$$P = \frac{1}{2}\left|\left(2(6-1)+7(1+4)+12(-4-6)\right)\right|$$

$$P = \frac{1}{2}\left|\left(10+35-120\right)\right|$$

$$P = \frac{1}{2}\cdot 75 = \frac{75}{2}$$

Za trougao MNB imamo :

$$P=\frac{1}{2}\left|\left(x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)\right)\right|$$
$$P=\frac{1}{2}\left|\left(4(3-6)+10(6-0)+7(0-3)\right)\right|$$
$$P=\frac{1}{2}\left|\left(-12+60-21\right)\right|$$
$$P=\frac{1}{2}\cdot 27=\frac{27}{2}$$

Površina traženog trapeza je onda $\frac{75}{2}-\frac{27}{2}=\frac{48}{2}=24$

Primer 3.

Prava sadrži tačku M (-5,4) i sa koordinatnim osama gradi trougao površine P=5.

Odrediti njenu jednačinu.

Rešenje:

Da se podsetimo da segmentni oblik jednačine prave glasi $\frac{x}{m}+\frac{y}{n}=1$, gde su m i n odsečci na x i y osi. Površina trougla će onda biti $P=\frac{m\cdot n}{2}$.

Ako prava sadrži neku tačku onda njene koordinate zadovoljavaju jednačinu prave, pa imamo:

$$\frac{-5}{m}+\frac{4}{n}=1...../*mn$$
$$-5n+4m=mn$$

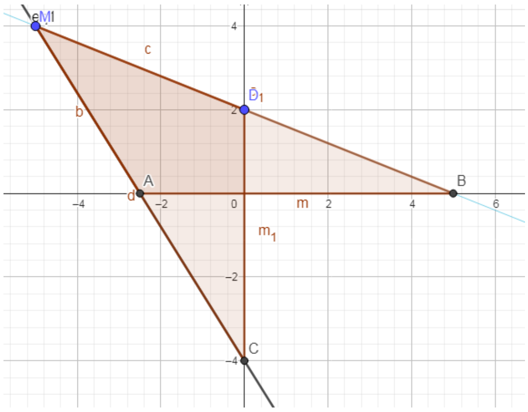
a kako je površina tog trougla 5 imamo

$$5=\frac{m\cdot n}{2}$$
$$m\cdot n=10\rightarrow m=\frac{10}{n}$$

$$-5n+4\frac{10}{n}=\frac{10}{n}n$$
$$-5n+\frac{40}{n}=10.../(-5)$$
$$n-\frac{8}{n}=-2.../*n$$
$$n^2+2n-8=0$$
$$n_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-2\pm 6}{2}\rightarrow n_1=2;n_2=-4$$

Sad se vratimo da nadjemo m:

$$m_1 = \frac{10}{n_1} = \frac{10}{2} = 5 \wedge m_2 = \frac{10}{n_2} = \frac{10}{-4} = -\frac{5}{2}$$



Tražene prave su : $\frac{x}{5} + \frac{y}{2} = 1$ i $\frac{x}{-2,5} + \frac{y}{-4} = 1$

Primer 4.

Odrediti jednačinu prave koja sadrži tačku P(2,3) i paralelna je pravoj x+y-2=0.

Rešenje:

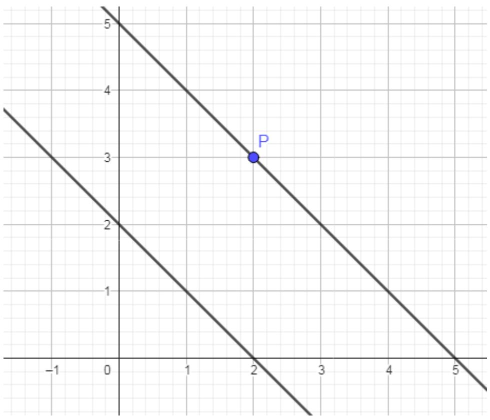
Najpre ćemo datu pravu prebaciti u eksplicitni oblik da možemo pročitati njeno k.

x+y-2=0

y=-x+2

k=-1

Kroz tačku P(2,3) postavljamo pravu kroz jednu tačku sa koeficijentom pravca k=-1 zbog uslova paralelnosti $k_1 = k_2$.



$$y - y_1 = k(x - x_1)$$
$$y - 3 = -1(x - 2)$$
$$y - 3 = -1x + 2$$
$$\boxed{y = -x + 5} \rightarrow \text{tražena prava}$$

Primer 5.

Odrediti jednačinu prave koja sadrži tačku A(1,2) i normalna je sa pravom 2x+3y-1=0

Rešenje:

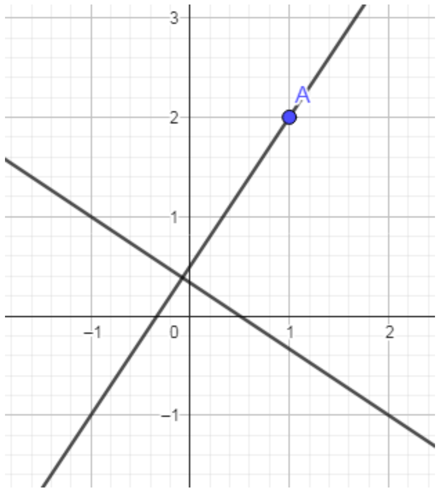
Pravu ćemo prebaciti u eksplicitni oblik da možemo pročitati njeno k.

$$2x+3y-1=0$$
$$3y=-2x+1$$
$$y=-\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}\to k=-\frac{2}{3}$$

Nađemo naše k iz uslova normalnosti:

$$k_1\cdot k_2=-1$$
$$k\cdot(-\frac{2}{3})=-1$$
$$k=\frac{3}{2}$$

I konačno jednačina prave kroz jednu tačku:



$$y-y_1=k(x-x_1)$$
$$y-2=\frac{3}{2}(x-1)$$
$$y=\frac{3}{2}x-\frac{3}{2}+2$$
$$\boxed{y=\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}}\text{ je tražena prava}$$

Primer 6.

Odrediti tačku R simetričnu sa tačkom P(-5,13) u odnosu na pravu 2x-3y-3=0

Rešenje:

Ideja je da kao u prethodnom primeru nadjemo pravu kroz tačku P koja je normalna na datu pravu. Onda ćemo rešavajući sistem od te dve jednačine naći projekciju te tačke na datu pravu . Koristeći formulice za sredinu duži naći ćemo simetričnu tačku .

$$2x-3y-3=0$$
$$3y=2x-3$$
$$y=\frac{2}{3}x-1\to k=\frac{2}{3}$$

$$k_1\cdot k_2=-1$$
$$k\cdot\frac{2}{3}=-1$$
$$k=-\frac{3}{2}$$

$$y-y_1=k(x-x_1)$$
$$y-13=-\frac{3}{2}(x+5)$$
$$y=-\frac{3}{2}x-\frac{15}{2}+13\to y=-\frac{3}{2}x+\frac{11}{2}$$

Dalje rešavamo sistem

$$\frac{y = \frac{2}{3}x - 1}{\underline{y = -\frac{3}{2}x + \frac{11}{2}}}$$

$$\frac{2}{3}x - 1 = -\frac{3}{2}x + \frac{11}{2} \ldots /\cdot 6$$

$$4x - 6 = -9x + 33$$

$$13x = 39$$

$$x = 3 \rightarrow y = \frac{2}{3} \cdot 3 - 1 = 1 \rightarrow Q(3,1)$$

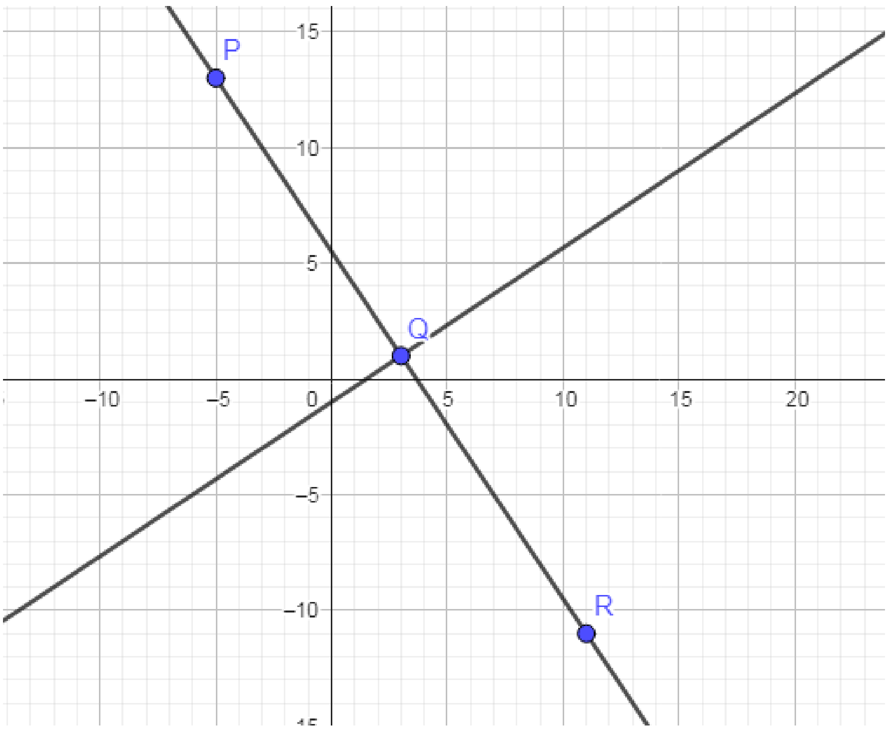
Koristimo formule za sredinu duži (duž je PR a sredina je tačka Q), neka je $R(x_2, y_2)$

$$x_s = \frac{x_1 + x_2}{2} \rightarrow 3 = \frac{-5 + x_2}{2} \rightarrow x_2 = 11$$

$$y_s = \frac{y_1 + y_2}{2} \rightarrow 1 = \frac{13 + y_2}{2} \rightarrow y_2 = -11$$

$$\boxed{R(11,-11)} \rightarrow \text{tražena tačka}$$

Evo slike da malo pojasni postupak:



Primer 7.

Odrediti najmanji ugao za koji treba da se obrne prava 3x+4y-25=0 oko svoje tačke M(7,y) , da bi joj pripadala tačka S(6,8).

Rešenje:

Najpre ćemo u datoj pravoj zameniti da je x=7 da nadjemo y koordinatu:

$$3x+4y-25=0$$
$$21+4y-25=0$$
$$4y=4$$
$$y=1$$

Dakle, koordinate tačke M(7,1).

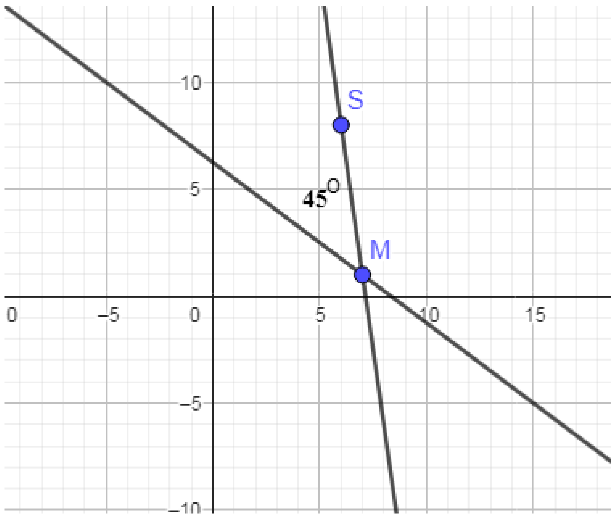
Dalje možemo tražimti jednačinu prave kroz tačke M(7,1) i S(6,8), ali nama samo treba njeno k, pa ćemo iskoristiti formulu:

$$k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$
$$k=\frac{8-1}{6-7}$$
$$k=-7$$

Prebacimo i početnu pravu u eksplicitni oblik:

$$3x+4y-25=0$$
$$4y=-3x+25$$
$$y=-\frac{3}{4}x+\frac{25}{4}$$
$$k=-\frac{3}{4}$$

Tražimo ugao između ove dve prave:



$$tg\alpha=\left|\frac{k_2-k_1}{1+k_1\cdot k_2}\right|$$
$$tg\alpha=\left|\frac{-\frac{3}{4}-(-7)}{1+(-\frac{3}{4})\cdot(-7)}\right|$$
$$tg\alpha=\left|\frac{-\frac{3}{4}+7}{1+\frac{21}{4}}\right|$$
$$tg\alpha=\left|\frac{\frac{25}{4}}{\frac{25}{4}}\right|$$
$$tg\alpha=1\rightarrow\boxed{\alpha=45^0}$$

www.matematiranje.in.rs