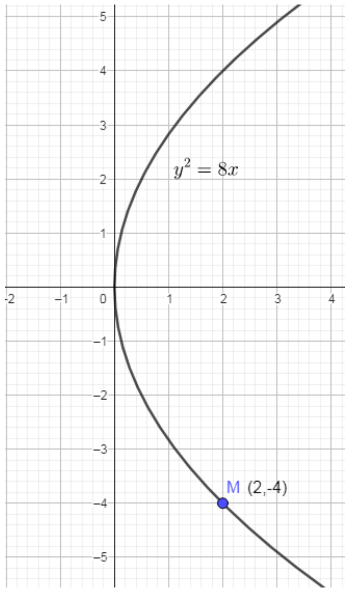
Parabola – razni zadaci

Primer 1.

Odrediti jednačinu parabole $y^2 = 2px$ koja sadrži tačku M(2,-4).



Rešenje:

Koordinate tačke M zadovoljavaju jednačinu parabole , pa je:

$$y^2 = 2px$$
$$(-4)^2 = 2p \cdot 2$$
$$16 = 4p$$
$$p = 4$$
$$y^2 = 8x$$

Primer 2.

Napisati jednačinu parabole ako je prava 3x+2y+3=0 njena tangenta.

Rešenje:

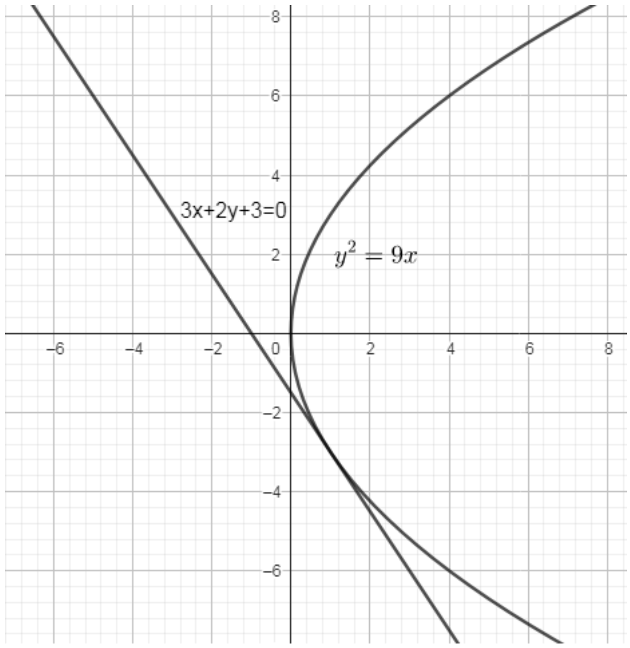
Tražimo p u jednačini $y^2 = 2px$.

Pravu prebacimo u eksplicitni oblik

$$3x + 2y + 3 = 0$$
$$2y = -3x - 3$$
$$y = -\frac{3}{2}x - \frac{3}{2} \rightarrow k = -\frac{3}{2} \wedge n = -\frac{3}{2}$$

Uslov dodira

$$2kn = p$$
$$2 \cdot (-\frac{3}{2}) \cdot (-\frac{3}{2}) = p$$
$$p = \frac{9}{2}$$
$$y^2 = 2 \cdot \frac{9}{2} x$$
$$y^2 = 9x$$



Primer 3.

Iz tačke S (-2,-2) konstruisane su tangente na parabolu $y^2 = 16x$. Odrediti:

a) jednačine tangenti
b) ugao između njih
c) površinu trougla koji obrazuju tangente i prava koja prolazi kroz dodirne tačke

Rešenje:

Tražimo pravu y = kx + n

$$y^2 = 16x \rightarrow 2p = 16 \rightarrow p = 8$$

Tačka S(-2,-2) je na tangenti:

$$y = kx + n$$
$$-2 = -2k + n \rightarrow n = 2k - 2$$
$$2kn = p \rightarrow \text{uslov dodira}$$
$$2k(2k-2) = 8$$
$$4k^2 - 4k - 8 = 0$$
$$k^2 - k - 2 = 0$$
$$k_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{1 \pm 3}{2} \rightarrow k_1 = 2, k_2 = -1$$
$$n = 2k - 2$$
$$n_1 = 2 \cdot 2 - 2 = 2$$
$$n_2 = 2 \cdot (-1) - 2 = -4$$
$$t_1 : y = 2x + 2$$
$$t_2 : y = -x - 4$$

Ugao između tangenti tražimo:

$$tg\alpha = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2} \right| = \left| \frac{-1-2}{1 + 2 \cdot (-1)} \right| = 3 \rightarrow \alpha = arctg 3$$

Dalje tražimo tačke preseka rešavajući sisteme jednačina:

$y^2 = 16x$	$y^2 = 16x$
$\underline{y = 2x + 2}$	$\underline{y = -x - 4}$
$(2x+2)^2 = 16x$	$(-x-4)^2 = 16x$
$4x^2 + 8x + 4 = 16x$	$x^2 + 8x + 16 = 16x$
$4x^2 - 8x + 4 = 0$	$x^2 - 8x + 16 = 0$
$x^2 - 2x + 1 = 0 \rightarrow x = 1$	$(x-4)^2 = 0 \rightarrow x = 4$
$y = 4$	$y = -8$

Sad računa P trougla kroz tačke S(-2,-2), A(1,4) i B(4,-8)

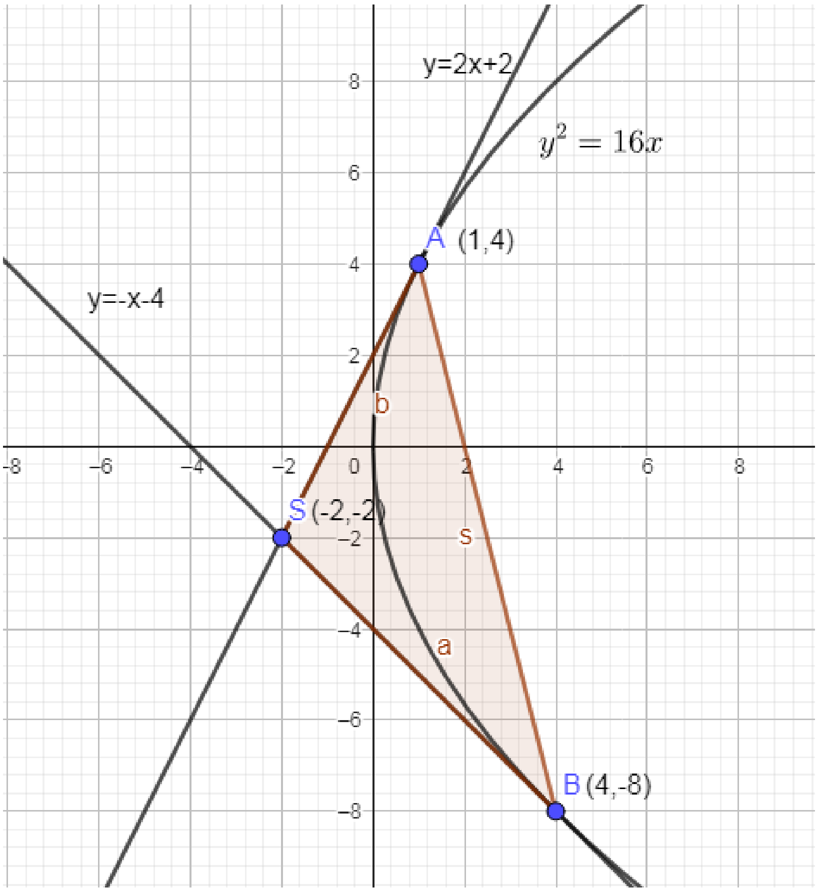
$$P=\frac{1}{2}\left|\left(x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)\right)\right|$$

$$P=\frac{1}{2}\left|\left(-2(4+8)+1(-8+2)+4(-2-4)\right)\right|$$

$$P=\frac{1}{2}\left|\left(-24-6-24\right)\right|$$

$$P=\frac{1}{2}\cdot 54=27$$

Da pogledamo sliku:



Primer 4.

Iz tačke B(2,-4) konstruisane su tangente na parabolu $x^2=8y$.

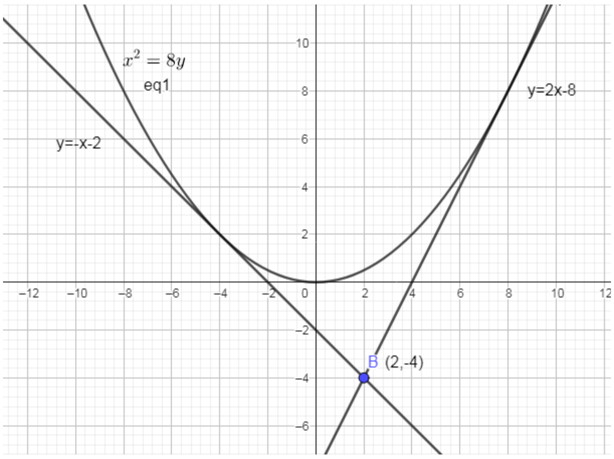
Napisati njihove jednačine.

Rešenje:

Tražimo pravu y = kx + n

Tačka B(2,-4) pripada tangenti pa je -4 = 2k +n to jest n = -2k-4

$$y = kx + n$$
$$y = kx - 2k - 4$$
$$x^2 = 8(kx - 2k - 4)$$
$$x^2 = 8kx - 16k - 32$$
$$x^2 - 8kx + 16k + 32 = 0 \rightarrow a = 1, b = -8k, c = 16k + 32$$



Diskriminanta mora biti jednaka 0.

$$D = b^2 - 4ac$$
$$D = (-8k)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (16k + 32)$$
$$D = 64k^2 - 64k - 144$$
$$64k^2 - 64k - 144 = 0$$
$$k^2 - k - 2 = 0 \rightarrow k_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \rightarrow k_1 = -1, k_2 = 2$$

Vratimo se da nađemo n:

$$n = -2k - 4 \rightarrow n_1 = -2, n_2 = -8$$
$$t_1 : y = -x - 2$$
$$t_2 : y = 2x - 8$$

Sad razmišljamo: Da li smo mogli da koristimo uslov dodira 2kn=p kao dosad?

Ajmo mi to da proverimo....

$$y = kx + n$$
$$\underline{x^2 = 2py}$$
$$x^2 = 2p(kx + n)$$
$$x^2 = 2pkx + 2pn$$
$$x^2 - 2pkx - 2pn = 0 \rightarrow a = 1, b = -2pk, c = -2pn$$
$$D = b^2 - 4ac$$
$$D = (-2pk)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2pn)$$
$$D = 4p^2k^2 + 8pn = 0$$
$$4p(pk^2 + 2n) = 0 \rightarrow \boxed{pk^2 + 2n = 0}$$

Uslov dodira je sasvim drugačiji, da proverimo da li radi...

$$n = -2k - 4$$
$$x^2 = 8y \rightarrow 2p = 8 \rightarrow p = 4$$
$$pk^2 + 2n = 0$$
$$4k^2 + 2(-2k - 4) = 0$$
$$4k^2 - 4k - 8 = 0$$
$$k^2 - k - 2 = 0 \rightarrow k_1 = -1, k_2 = 2$$
$$RADI$$

Da izvučemo zaključak koji može ubrzati rad :

Kod zadataka u kojima je parabola $x^2=2py$ uslov dodira sa pravom y = kx+n je $pk^2+2n=0$.

Primer 5.

Odrediti koordinate temena, žižu i direktrisu parabole $y^2-6y-4x+17=0$

Rešenje:

Ovo nije klasična parabola $y^2 = 2px$ već translatorno pomerena, i njena jednačina je:

$(y-\beta)^2=2p(x-\alpha)$ gde je $C(\alpha,\beta)$ središte.

Da upakujemo našu parabolu:

$$
\begin{aligned}
&y^2-6y-4x+17=0\\
&y^2-6y=4x-17\\
&y^2-6y+9=4x-17+9\\
&(y-3)^2=4x-8\\
&(y-3)^2=4(x-2)\\
&\alpha=2,\beta=3\rightarrow C(2,3)\wedge 2p=4\rightarrow p=2
\end{aligned}
$$

Koordinata žiže je $(\alpha+\frac{p}{2},\beta)$, za našu parabolu je $(\alpha+\frac{p}{2},\beta)=(2+\frac{2}{2},3)=(3,3)$

Direktrisa je $x=-\frac{p}{2}+\alpha$, za našu parabolu je $x=-\frac{2}{2}+2\rightarrow x=1$