Linearno programiranje

Ovde od nas zahtevaju da nadjemo minimum ili maksimum funkcije **F(x,y)=ax+by**

na nekom skupu S zadatom preko sistema nejednačina $a_i x + b_i y \geq c_i$ gde i=1,2,3...,n.

Funkcija F(x,y) je funkcija cilja, nejednačine su nam ograničenja a max ili min iz skupa S je optimalno rešenje.

Da se podsetimo najpre kako grafički predstaviti rešenje nejednačine $ax + by \geq c$.

Primer 1.

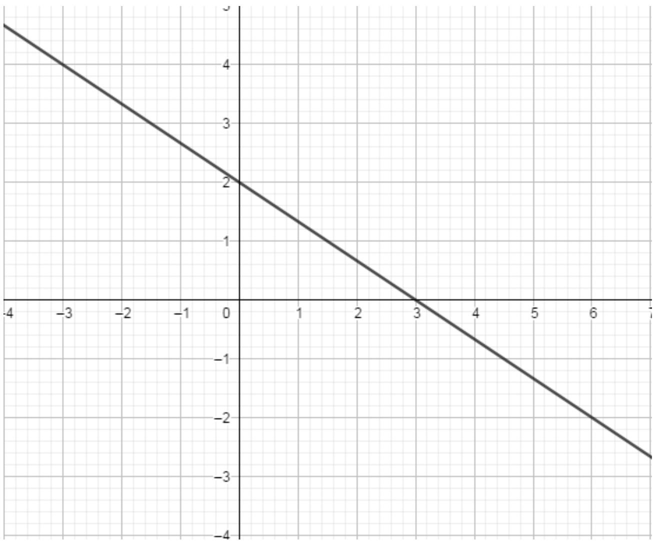
Grafički reši nejednačinu $2x + 3y - 6 \geq 0$

Rešenje:

Nacrtamo pravu $2x + 3y - 6 = 0$.

Za x = 0 imamo $2 \cdot 0 + 3y - 6 = 0 \rightarrow 3y - 6 = 0 \rightarrow y = 2$

Za y = 0 je $2x + 3 \cdot 0 - 6 = 0 \rightarrow 2x - 6 = 0 \rightarrow x = 3$

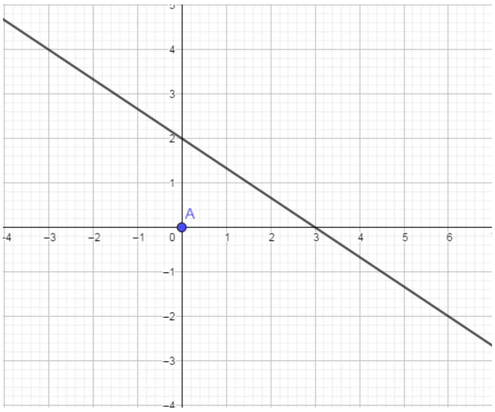


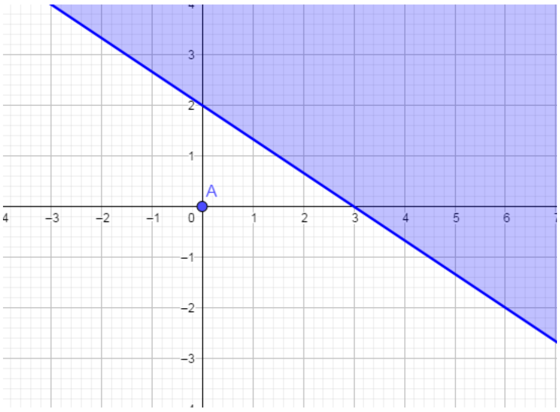
Uočimo recimo tačku A(0,0) i zamenimo u datu nejednačinu da vidimo da li je zadovoljava.

Ako je zadovoljava onda šrafiramo tu poluravan, ako ne šrafiramo suprotnu stranu.

$$2x + 3y - 6 \geq 0$$
$$2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 - 6 \geq 0$$
$$-6 \geq 0$$

Ne zadovoljava pa šrafiramo suprotnu stranu:





Ako prava baš prolazi kroz koordinatni početak onda uzmemo neku drugu tačku i radimo sve isto...

Primer 2.

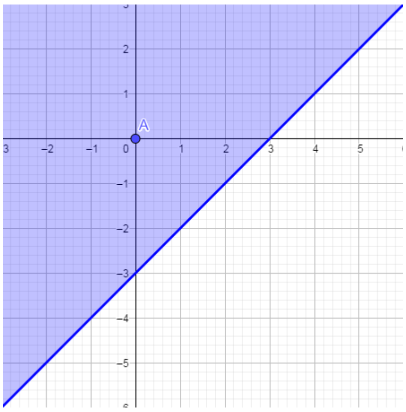
Naći minimum i maksimum funkcije L = x+y uz ograničenja

$x - y \le 3 \wedge x - y \ge -2 \wedge x + 2y \le 10 \wedge x \le 4 \wedge x \ge 0 \wedge y \ge 0$

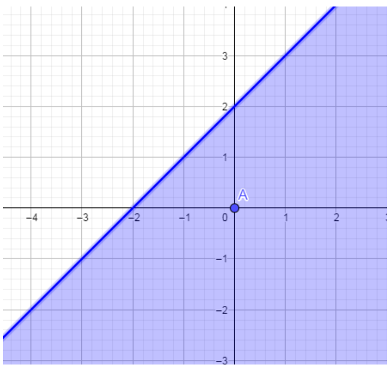
Rešenje:

Kako nam je ovo prvi ovakav primer, radićemo za svaku pravu posebno, pa ćemo to naneti na jednu sliku.

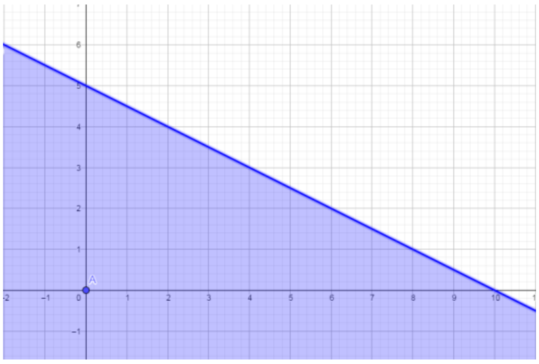
Za pravu $x - y = 3$ tačka (0,0) zadovoljava nejednakost $0 - 0 \le 3 \to 0 \le 3$ pa šrafiramo:



Za pravu x-y=-2 tačka (0,0) zadovoljava nejednakost $0 - 0 \ge -2 \to 0 \ge -2$ pa šrafiramo :

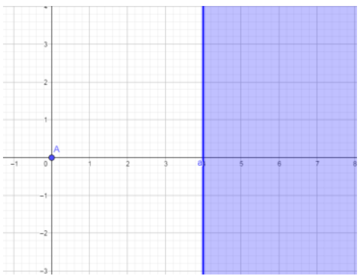


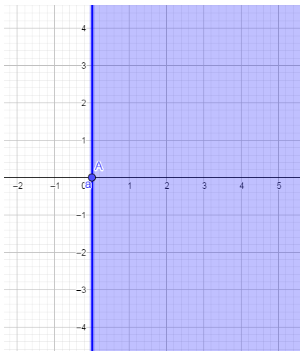
Za pravu x+2y=10 takodje (0,0) zadovoljava nejednakost $0+2\cdot 0\leq 10\rightarrow 0\leq 10$ pa imamo:

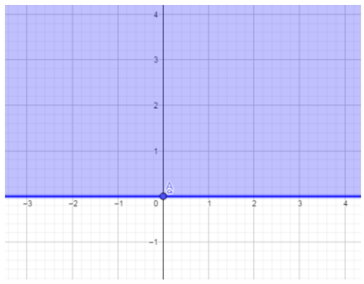


Preostale tri nejednakosti su očigledne za šrafiranje:

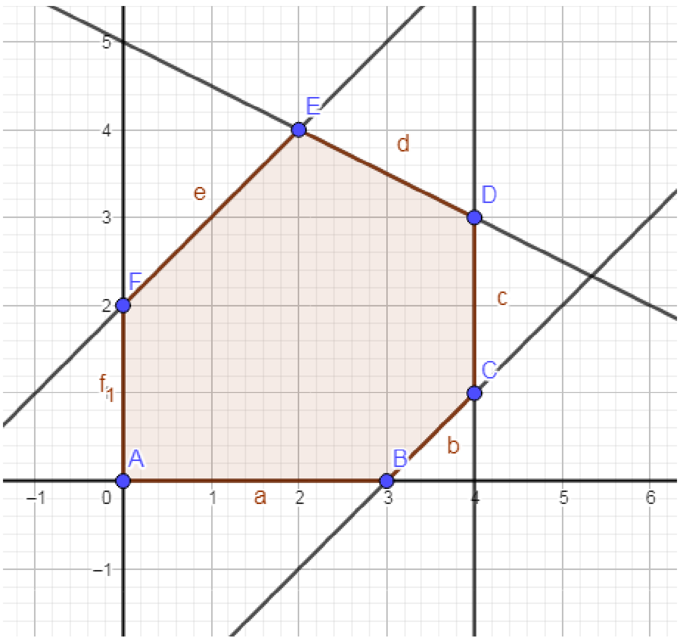
$x\leq 4$ $\quad$ $x\geq 0$ $\quad$ $y\geq 0$







Sad ovo sve nanesemo na istu sliku:



Dalje trebamo naći koordinate presečnih tačaka. To tražimo rešavajući sisteme jednačina, ali samo za one prave čiji nam preseci trebaju….

$$
\begin{aligned}
&x - y = -2 \quad /*(-1)\\
&\underline{x + 2y = 10}\\
&-x + y = 2\\
&\underline{x + 2y = 10}\\
&3y = 12 \rightarrow y = 4\\
&x = -2 + 4 = 2\\
&(x, y) = (2, 4)
\end{aligned}
$$

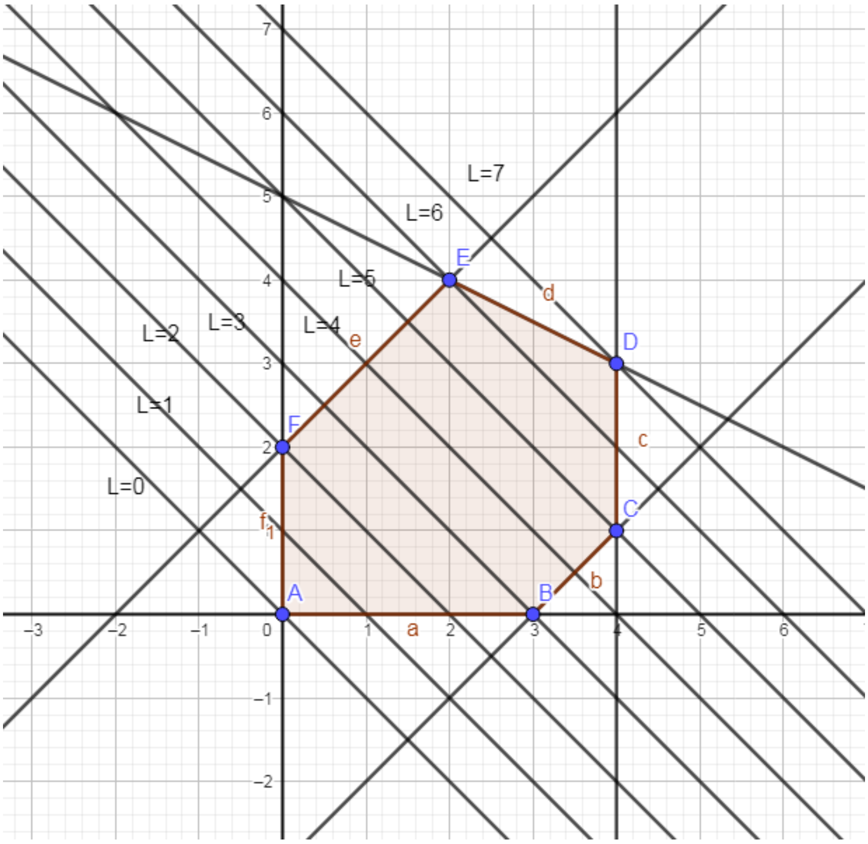
$$
\begin{aligned}
&x - y = 3\\
&\underline{x = 4}\\
&4 - y = 3 \rightarrow y = 1\\
&(x, y) = (4, 1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&x + 2y = 10\\
&\underline{x = 4}\\
&4 + 2y = 10 \rightarrow y = 3\\
&(x, y) = (4, 3)
\end{aligned}
$$

Dobili smo tačke A(0,0), B(3,0), C(4,1), D(4,3), E(2,4) i F(0,2).

Sad posmatramo funkciju čiji min i max tražimo : x+y=L

Za razne vrednosti L (0,1,2…) dobijamo paralelne prave koje seku naš skup koji smo išrafirali:



Minimalna vrednost biće za L=0 , gde prava x+y=0 seče nas skup u tački A(0,0).

Maksimalnu vrednost će imati u tački D(4,3) gde prava x+y=7 seče naš skup,

dakle L= 7 je max a L=0 je min.

Primer 3.

Data je funkcija cilja F = x+y i uslovi ograničenja: $x+y \geq 1 \wedge x+y \leq 7 \wedge x \geq 0 \wedge y \geq 0$

Odredi minimalnu i maksimalnu vrednost .

Rešenje:

Pravu x+y=1 crtamo preko

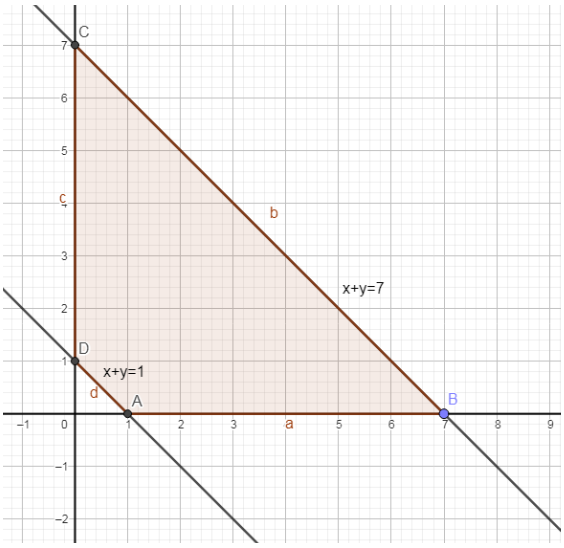
x	0	1
y	1	0

i tačka (0,0) ne zadovoljava nejednakost $x+y \geq 1$

Pravu x + y = 7 crtamo preko

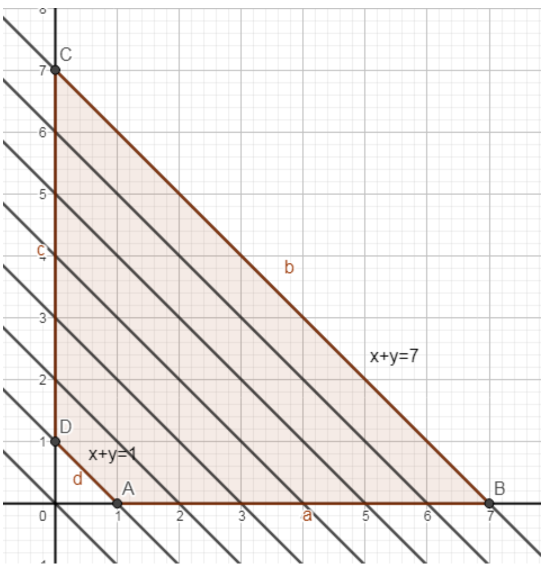
x	0	7
y	7	0

a tačka (0,0) sad zadovoljava nejednakost $x+y \leq 7$



Funkcija cilja nam je x+y = F i ako kao u prethodnom primeru posmatramo različite vrednosti

za F dobijamo prave x+y=1, x+y=2,....x+y=7



Medjutim sada nemamo konkretnu tačku koja će biti min ili max pa ovaj zadatak ima beskonačno mnogo rešenja.

Dakle ne mora rešenje biti jedinstveno što nam je I bio cilj da objasnimo u ovom primeru.

www.matematiranje.in.rs