Kružnica – razni zadaci

Primer 1.

Odrediti parametar k tako da kružnica $x^2+y^2-(k-4)x-ky+2k+5=0$ dodiruje y- osu.

Rešenje:

Kad će kružnica $(x-p)^2+(y-q)^2=r^2$ dodirivati y-osu?

U situaciji kad je r = p, što znači da poluprečnik kružnice mora biti isti kao p.

Ako traže da kružnica dodiruje x-osu , onda mora biti da je r = q.

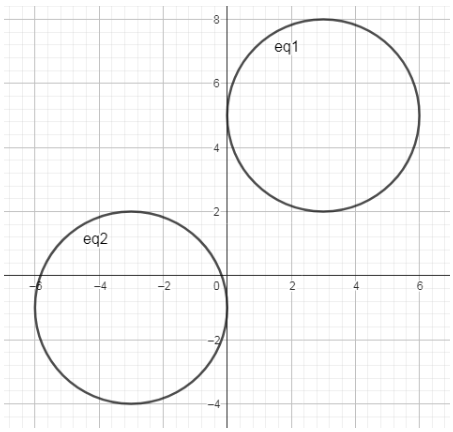
Da nadjemo najpre p, q i r iz zadate kružnice u raspakovanom obliku...

Ako je kružnica data u obliku $x^2+y^2+dx+ey+f=0$ možemo koristiti formulice

$$p=-\frac{d}{2}$$
$$q=-\frac{e}{2}$$
$$r^2=p^2+q^2-f$$

$$x^2+y^2-(k-4)x-ky+2k+5=0 \rightarrow d=-(k-4) \wedge e=-k \wedge f=2k+5$$

$$p=-\frac{d}{2}=\frac{k-4}{2}$$
$$q=-\frac{e}{2}=\frac{k}{2}$$
$$r^2=p^2+q^2-f \rightarrow r^2=\left(\frac{k-4}{2}\right)^2+\left(\frac{k}{2}\right)^2-(2k+5)$$



Zaključili smo da mora biti r = p pa imamo:

$$\left(\frac{k-4}{2}\right)^2+\left(\frac{k}{2}\right)^2-(2k+5)=\left(\frac{k-4}{2}\right)^2$$
$$\left(\frac{k}{2}\right)^2-(2k+5)=0$$
$$\frac{k^2}{4}-2k-5=0$$
$$k^2-8k-20=0 \rightarrow k_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{8\pm12}{2} \rightarrow k_1=10 \wedge k_2=-2$$

Za ove dve vrednosti tražene kružnice su:

$$x^2+y^2-6x-10y+25=0 \wedge x^2+y^2+6x+2y+1=0 \qquad \text{(na slici)}$$

Primer 2.

Odrediti uzajamni položaj kružnica:

a) $x^2+y^2-2x-6y+6=0 \wedge x^2+y^2-10x-8y+40=0$
b) $x^2+y^2-8x-18y+93=0 \wedge x^2+y^2-8x-8y+23=0$
c) $x^2+y^2=25 \wedge 2x^2+2y^2-4x-3y-25=0$

Rešenje:

Najpre da razmislimo kakav sve može biti uzajamni položaj dve kružnice i od čega to može da zavisi.

Kružnice mogu da se <u>ne seku (jedna van druge)</u> a onda je zbir poluprečnika manji od rastojanja između centara.

Kružnice mogu da se <u>seku u jednoj tački (spolja)</u> a onda je zbir poluprečnika jednak sa rastojanjem između centara.

Kružnice mogu da se <u>seku u jednoj tački (unutra)</u> a onda je razlika poluprečnika jednaka sa rastojanjem između centara.

Kružnice mogu da se <u>seku u dvema tačkama</u> a onda je zbir poluprečnika veći od rastojanja između centara.

Kružnice mogu da se <u>ne seku (jedna u drugoj)</u> a onda je razlika poluprečnika veća od rastojanja između centara.

Kružnice mogu da se <u>ne seku a imaju isti centar</u>, onda se zovu koncentrične.

Da ispitamo redom šta se gde dešava u našem zadatku….

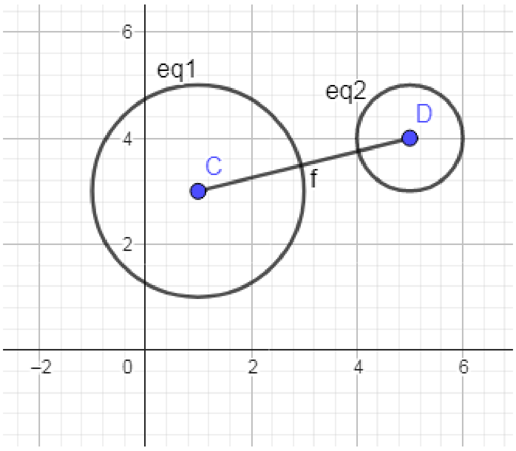
a) $x^2+y^2-2x-6y+6=0 \wedge x^2+y^2-10x-8y+40=0$

Najpre moramo da ih upakujemo da bi mogli da pročitamo koordinate p,q i r , da nadjemo rastojanje izmedju centara , a najbolje je da sve to vidimo i na slici…

$$\begin{array}{ll}
x^2+y^2-2x-6y+6=0 & x^2+y^2-10x-8y+40=0 \\
x^2-2x+y^2-6y=-6 & x^2-10x+y^2-8y=-40 \\
x^2-2x+1+y^2-6y+9=-6+1+9 & x^2-10x+25+y^2-8y+16=-40+25+16 \\
(x-1)^2+(y-3)^2=4 \to p=1, q=3, r=2 & (x-5)^2+(y-4)^2=1 \to p=5, q=4, r=1
\end{array}$$

Rastojanje između centara je
$$d(C_1,C_2)=\sqrt{(p_2-p_1)^2+(q_2-q_1)^2}$$
$$d(C_1,C_2)=\sqrt{(5-1)^2+(4-3)^2}=\sqrt{17}$$

a zbir poluprečnika je 2+1 = 3 a $\sqrt{17} > 3$ pa kružnice nemaju zajedničkih tačaka.



b) $x^2+y^2-8x-18y+93=0 \wedge x^2+y^2-8x-8y+23=0$

$$x^2+y^2-8x-18y+93=0$$
$$x^2-8x+y^2-18y=-93$$
$$x^2-8x+16+y^2-18y+81=-93+16+81$$
$$(x-4)^2+(y-9)^2=4 \to p=4, q=9, r=2$$

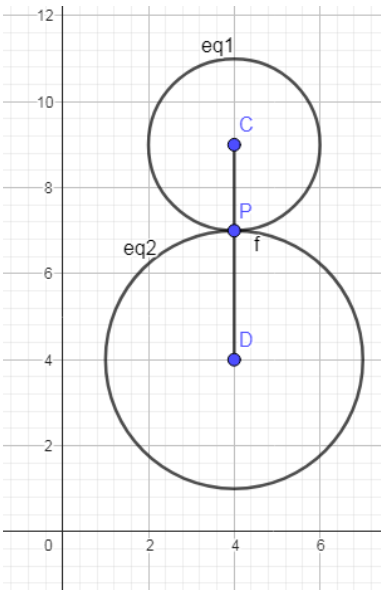
$$x^2+y^2-8x-8y+23=0$$
$$x^2-8x+y^2-8y=-23$$
$$x^2-8x+16+y^2-8y+16=-23+16+16$$
$$(x-4)^2+(y-4)^2=9 \to p=4, q=4, r=3$$

$$d(C_1,C_2)=\sqrt{(p_2-p_1)^2+(q_2-q_1)^2}$$
$$d(C_1,C_2)=\sqrt{(4-4)^2+(4-9)^2}=5$$

Kako je zbir poluprečnika 3+2=5 jednak rastojanju između centara znamo da se kružnice dodiruju spolja.

Tačku preseka tražimo rešavajući sistem jednačina.

$$(x-4)^2+(y-9)^2=4$$
$$\underline{(x-4)^2+(y-4)^2=9}$$
$$4-(y-9)^2=9-(y-4)^2$$
$$4-\cancel{y^2}+18y-81=9-\cancel{y^2}+8y-16$$
$$18y-8y=-7+77$$
$$10y=70 \to y=7 \to x=4$$



c) $x^2 + y^2 = 25 \wedge 2x^2 + 2y^2 - 4x - 3y - 25 = 0$

$x^2 + y^2 = 25$ je centralna kružnica sa poluprečnikom r = 5.

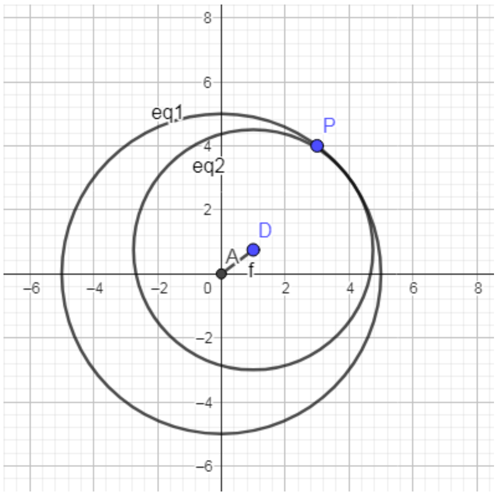
$$2x^2 + 2y^2 - 4x - 3y - 25 = 0 / ...:2$$
$$x^2 + y^2 - 2x - \frac{3}{2}y = \frac{25}{2}$$
$$x^2 - 2x + y^2 - \frac{3}{2}y = \frac{25}{2}$$
$$x^2 - 2x + 1 + y^2 - \frac{3}{2}y + \frac{9}{16} = \frac{25}{2} + 1 + \frac{9}{16}$$
$$(x-1)^2 + (y - \frac{3}{4})^2 = \frac{225}{16} \to p = 1, q = \frac{3}{4}, r = \frac{15}{4}$$

$$d(C_1, C_2) = \sqrt{(p_2 - p_1)^2 + (q_2 - q_1)^2}$$
$$d(C_1, C_2) = \sqrt{(1-0)^2 + (\frac{3}{4} - 0)^2} = \sqrt{1 + \frac{9}{16}} = \frac{5}{4}$$

Razlika poluprečnika je $5 - \frac{15}{4} = \frac{5}{4}$ što je jednako sa rastojanjem između centara pa se kružnice dodiruju iznutra.

Tačku preseka opet moramo naći rešavajući sistem:

$$x^2 + y^2 = 25$$
$$\underline{2x^2 + 2y^2 - 4x - 3y - 25 = 0}$$
$$50 - 4x - 3y - 25 = 0$$
$$4x + 3y = 25 \to y = \frac{25 - 4x}{3}$$
$$x^2 + \left(\frac{25-4x}{3}\right)^2 = 25 ...itd \to x = 3 \to y = 4$$



Primer 3.

Odredi jednačinu tangenti kružnice $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$ koja je paralelna sa pravom 4x-3y-12=0

Rešenje:

Da spakujemo kružnicu:

$$x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$$
$$x^2 - 4x + y^2 - 6y = 12$$
$$x^2 - 4x + 4 + y^2 - 6y + 9 = 12 + 4 + 9$$
$$(x-2)^2 + (y-3)^2 = 25 \to C(2,3) \wedge r^2 = 25$$

Pravu ćemo prebaciti u eksplicitni oblik :

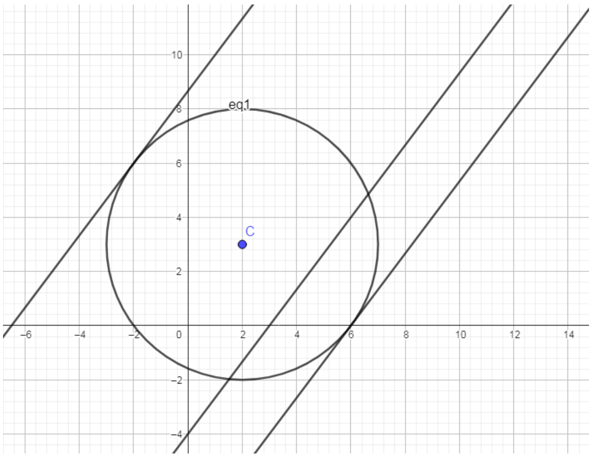
$4x-3y-12=0$

$3y=4x-12$

$y=\frac{4}{3}x-4 \to k=\frac{4}{3}$

Uslov paralelnosti je $k_1=k_2$ pa zaključujemo

da će i za naše prave biti $k=\frac{4}{3}$.



Sad još preko uslova dodira da nadjemo n.

$r^2(k^2+1)=(kp-q+n)^2$

$25(\left(\frac{4}{3}\right)^2+1)=(\frac{4}{3}\cdot 2-3+n)^2$

$25(\frac{16}{9}+1)=(n-\frac{1}{3})^2$

$(n-\frac{1}{3})^2=\frac{625}{9}$

$n-\frac{1}{3}=\pm\sqrt{\frac{625}{9}}$

$n-\frac{1}{3}=\pm\frac{25}{3} \to n_1=\frac{26}{3} \wedge n_2=-8$

Jednačine tangenti su:

$t_1: y=\frac{4}{3}x+\frac{26}{3}$

$t_2: y=\frac{4}{3}x-8$

Primer 4.

Odredi ugao pod kojim prava x-2y = 0 seče kružnicu $x^2+y^2=5$

Rešenje:

Ideja: Naći ćemo tačke preseka prave i kružnice (sistem jednačina). U tačkama preseka postavimo tangente na kružnicu. Ugao između tangente i date prave je ugao pod kojim se seku prava i kružnica.

To odradimo za jednu tačku preseka, za drugu će biti isto rešenje.

$$x^2 + y^2 = 5$$
$$\underline{x - 2y = 0}$$
$$x - 2y = 0 \rightarrow x = 2y$$
$$(2y)^2 + y^2 = 5$$
$$4y^2 + y^2 = 5$$
$$y^2 = 1 \rightarrow y = \pm 1 \rightarrow y_1 = 1 \wedge y_2 = -1$$
$$x_1 = 2 \wedge x_2 = -2$$

Uzmimo tačku (2,1) i tu postavljamo tangentu.

$$xx_1 + yy_1 = r^2$$
$$2x + 1y = 5$$
$$y = -2x + 5$$

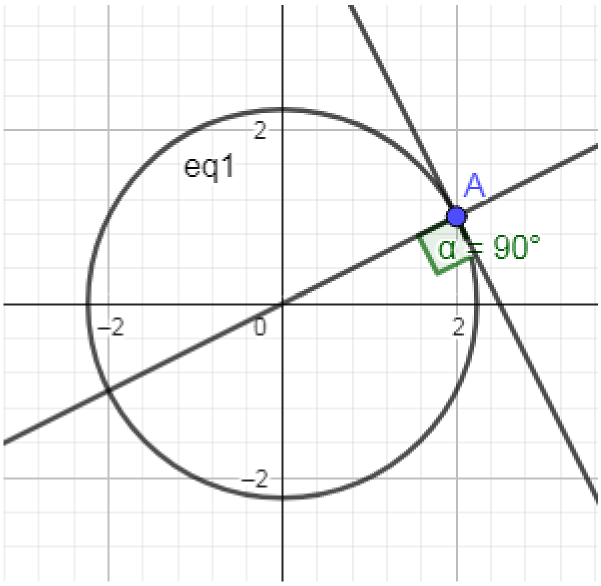
Odavde vidimo da je koeficijent pravca tangente k = -2.

Koeficijent pravca zadane prave je : $x - 2y = 0 \rightarrow y = \frac{1}{2}x \rightarrow k = \frac{1}{2}$

Dalje bi koristili formulu $tg\alpha = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}\right|$ ali ovde ne moramo jer
$$k_1 k_2 = -1$$
$$-2 \cdot \frac{1}{2} = -1$$

Pa zaključujemo da je u pitanju ugao od 90^0.

Evo slike:



Napomena: Ugao između dve kružnice se traži po istom principu. Nađemo presek rešavajući sistem, uzmemo jednu tačku preseka i u njoj postavimo tangente na obe kružnice pa nađemo ugao između tangenti.

Primer 5.

Odrediti zajedničke tangente kružnica $x^2 + y^2 = 45 \wedge x^2 + y^2 - 20x - 25 = 0$.

Rešenje:

Tražimo tangentu y = kx + n . Posao nam je da nađemo k i n a koliko će imati rešenja zavisi od položaja u kome se nalaze kružnice.

$$x^2+y^2=45 \to p=0, q=0, r^2=45$$
$$r^2(k^2+1)=(kp-q+n)^2$$
$$45(k^2+1)=n^2$$

$$x^2-20x+y^2=25$$
$$x^2-20x+100+y^2=25+100$$
$$(x-10)^2+y^2=125 \to p=10, q=0, r^2=125$$
$$r^2(k^2+1)=(kp-q+n)^2$$
$$125(k^2+1)=(10k+n)^2$$

Dalje rešavamo sistem jednačina :

$$45(k^2+1)=n^2$$
$$\underline{125(k^2+1)=(10k+n)^2}$$

Ako podelimo drugu jednačinu sa prvom imamo

$$\frac{125\cancel{(k^2+1)}}{45\cancel{(k^2+1)}}=\frac{(10k+n)^2}{n^2}$$
$$\frac{25}{9}=\left(\frac{10k+n}{n}\right)^2$$
$$\left(\frac{10k}{n}+1\right)=\pm\sqrt{\frac{25}{9}}$$
$$\left(\frac{10k}{n}+1\right)=\pm\frac{5}{3} \text{ sad moramo posebno}$$
$$\frac{10k}{n}+1=\frac{5}{3} \vee \frac{10k}{n}+1=-\frac{5}{3}$$

Radimo prvu situaciju a ona će nas verovatno odvesti do svih rešenja:

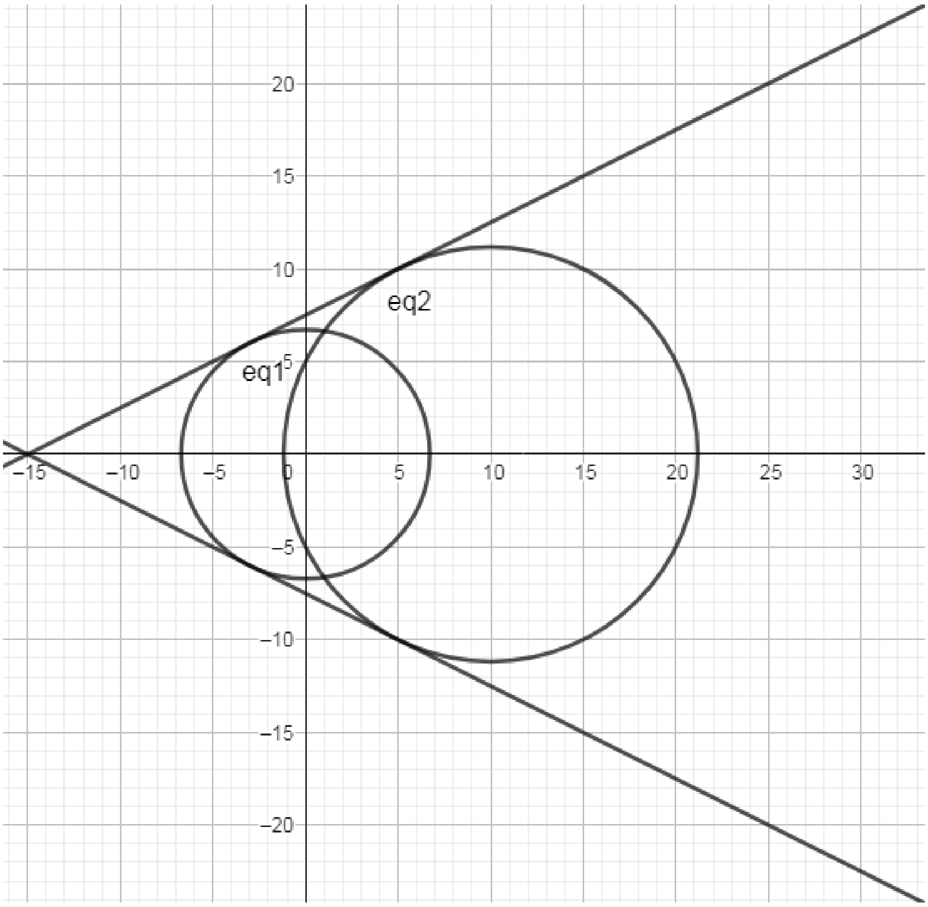
$$\frac{10k}{n}+1=\frac{5}{3}$$
$$\frac{10k}{n}=\frac{2}{3}$$
$$2n=30k$$
$$n=15k \wedge 45(k^2+1)=n^2$$
$$45(k^2+1)=(15k)^2$$
$$45k^2+45=225k^2$$
$$180k^2=45$$
$$k^2=\frac{1}{4} \to k_1=\frac{1}{2} \vee k_2=-\frac{1}{2} \to n=15k \to n_1=\frac{15}{2}, n_2=\frac{15}{2}$$

Dobili smo jednačine zajedničkih tangenata:

$$t_1 : y = \frac{1}{2}x + \frac{15}{2}$$

$$t_2 : y = -\frac{1}{2}x - \frac{15}{2}$$

Da pogledamo sliku:



www.matematiranje.in.rs