Hiperbola – razni zadaci

Primer 1.

Napisati jednačinu hiperbole ako joj pripadaju tačke $A(4,\sqrt{5})$ i $B(-4\sqrt{3},5)$.

Rešenje:

Koordinate datih tačaka menjamo u jednačinu hiperbole i rešavamo sistem.

$$\underline{A(4,\sqrt{5})}$$
$$b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$$
$$b^2 4^2-a^2\sqrt{5}^2=a^2b^2$$
$$16b^2-5a^2=a^2b^2$$
$$\underline{B(-4\sqrt{3},5)}$$
$$b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$$
$$b^2(-4\sqrt{3})^2-a^2 5^2=a^2b^2$$
$$48b^2-25a^2=a^2b^2$$
$$16b^2-5a^2=48b^2-25a^2$$
$$25a^2-5a^2=48b^2-16b^2$$
$$20a^2=32b^2\rightarrow a^2=\frac{8b^2}{5}\ \text{ ovo menjamo u } 16b^2-5a^2=a^2b^2$$
$$16b^2-5\frac{8b^2}{5}=\frac{8b^2}{5}b^2\rightarrow \cancel{8b^2}=\frac{\cancel{8b^2}\,b^2}{5}\rightarrow b^2=5\rightarrow a^2=8$$

Tražena jednačina hiperbole je:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\rightarrow\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{5}=1$$

Primer 2.

Na hiperboli $x^2-y^2=4$ odrediti tačku čiji su radijus vektori normalni.

Rešenje:

Nađimo najpre koordinate žiža:

$$x^2-y^2=4\rightarrow\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{4}=1\rightarrow a^2=4\wedge b^2=4$$
$$c^2=a^2+b^2\rightarrow c^2=4+4\rightarrow c^2=8\rightarrow c=\pm\sqrt{8}$$

Uzmimo proizvoljnu tačku (x_0,y_0) koja je na hiperboli.

Radijus vektori spajaju tu tačku i žiže $(-\sqrt{8},0)$ i $(\sqrt{8},0)$.

$\vec{r_1} = (x_0 - \sqrt{8}, y_0) \wedge \vec{r_2} = (x_0 + \sqrt{8}, y_0)$

U zadatku kaže da su radijus vektori normalni a znamo da je onda njihov skalarni proizvod jednak 0.

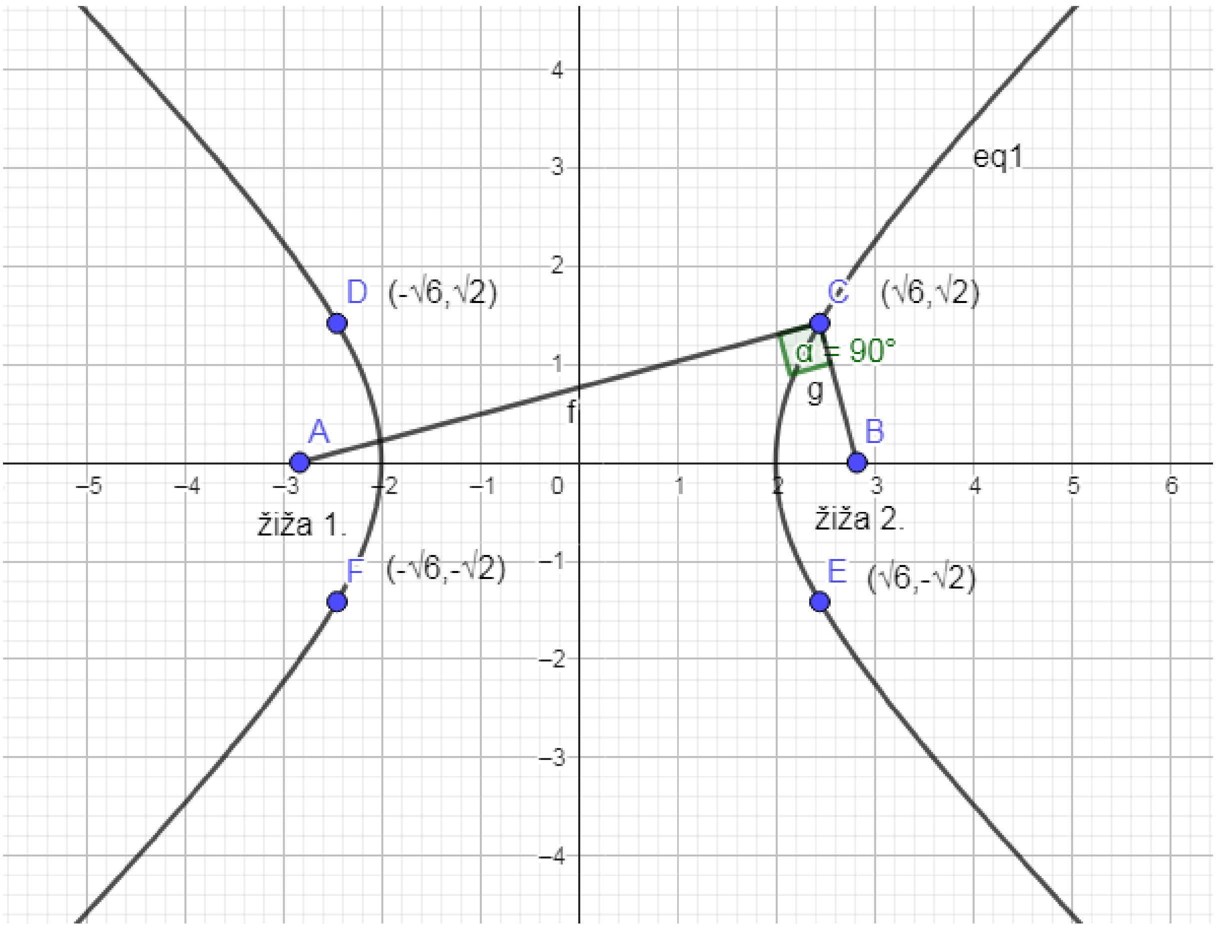
$$\vec{r_1} \cdot \vec{r_2} = 0$$
$$(x_0 - \sqrt{8}, y_0)(x_0 + \sqrt{8}, y_0) = 0$$
$$(x_0 - \sqrt{8})(x_0 + \sqrt{8}) + y_0^{\ 2} = 0$$
$$x_0^{\ 2} - \sqrt{8}^2 + y_0^{\ 2} = 0 \rightarrow \underline{x_0^{\ 2} + y_0^{\ 2} = 8}$$

Tačka (x_0, y_0) pripada hiperboli pa zadovoljava njenu jednačinu: $x_0^{\ 2} - y_0^{\ 2} = 4$

Sad imamo sistem jednačina:

$$x_0^{\ 2} - y_0^{\ 2} = 4$$
$$\underline{x_0^{\ 2} + y_0^{\ 2} = 8}$$
$$2x_0^{\ 2} = 12 \rightarrow x_0^{\ 2} = 6 \rightarrow x_0 = \pm\sqrt{6}$$
$$\text{Onda je } y_0^{\ 2} = 2 \rightarrow y_0 = \pm\sqrt{2}$$

Tražene tačke su $(\sqrt{6}, \sqrt{2}), (\sqrt{6}, -\sqrt{2}), (-\sqrt{6}, \sqrt{2})$ i $(-\sqrt{6}, -\sqrt{2})$.



Primer 3.

Iz žiže hiperbole $9x^2 - 16y^2 = 144$ konstruisana je normala na asimptotu. Izračunati površinu trougla ograničenu ovom normalom, asimptotom i apscisnom osom.

Rešenje:

Nađimo najpre žiže i asimptote pa ćemo postaviti problem i nacrtati sliku:

$$9x^2 - 16y^2 = 144$$

$$\frac{9x^2}{144} - \frac{16y^2}{144} = 1$$

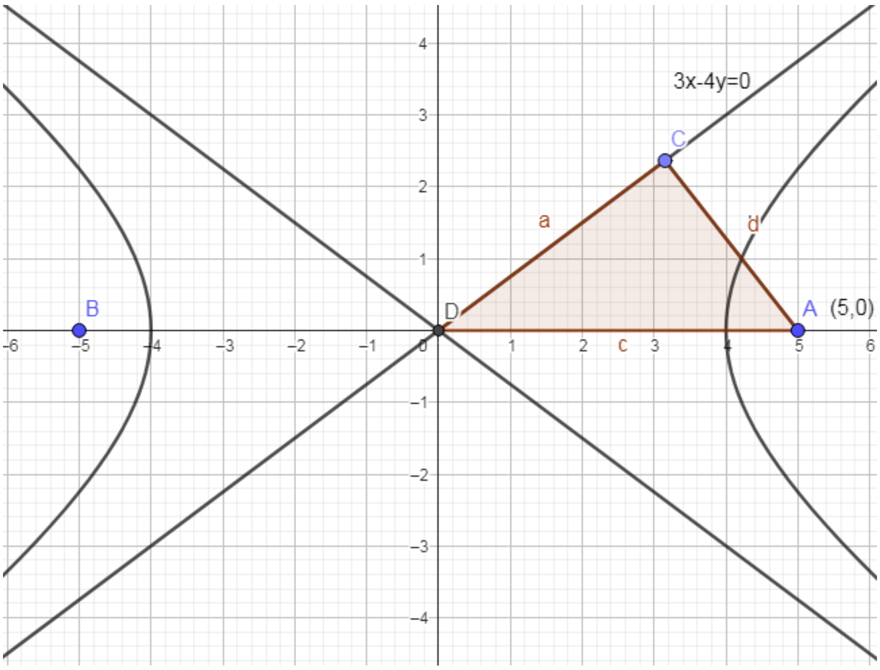
$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1 \to a^2 = 16 \wedge b^2 = 9 \to a = 4 \wedge b = 3$$

$$c^2 = a^2 + b^2 \to c^2 = 16 + 9 \to c^2 = 25 \to c = \pm 5$$

$F_1(-5,0), F_2(5,0)$ su žiže

$$y = \pm\frac{b}{a}x \to y = \frac{3}{4}x \wedge y = -\frac{3}{4}x \text{ su asimptote}$$

$$y = \frac{3}{4}x \to 3x - 4y = 0$$



Dužinu normale ćemo naći kao rastojanje tačke (5,0) od prave 3x-4y=0

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \to d = \frac{3 \cdot 5 - 4 \cdot 0}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{15}{5} = 3$$

Imamo dužinu hipotenule c=5 I dužinu katete b=3, primenjujemo Pitagorinu teoremu:

$$a^2+b^2=c^2$$
$$a^2+3^2=5^2 \to a^2=16 \to a=4$$

I još da nađemo površinu pravouglog trougla:

$$P=\frac{ab}{2} \to P=\frac{3\cdot 4}{2} \to P=6$$

Primer 4.

Odrediti jednačine tangenti hiperbole $16x^2-9y^2=144$ koja je paralelna sa pravom 4x-y+5=0.

Rešenje:

Neka je tražena jednačina tangente y = kx +n , k = ? , n = ?

Spakujemo hiperbolu:

$$16x^2-9y^2=144$$
$$\frac{16x^2}{144}-\frac{9y^2}{144}=1$$
$$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1 \to a^2=9 \wedge b^2=16$$

Pravu prebacimo u eksplicitni oblik:

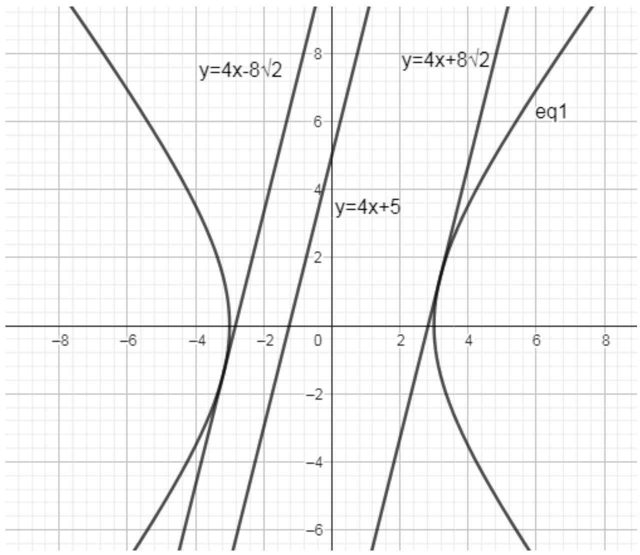
4x-y +5 = 0

y = 4x +5 pa je k = 4

Uslov paralelnosti nam kaže da je i naše k=4.

Idemo na uslov dodira da nađemo n.

$$a^2k^2-b^2=n^2$$
$$9\cdot 4^2-16=n^2$$
$$n^2=128 \to n=\pm\sqrt{64\cdot 2}=\pm 8\sqrt{2}$$
$$t_1: y=4x+8\sqrt{2}$$
$$t_2: y=4x-8\sqrt{2}$$



Primer 5.

Data je jednačina hiperbole $4x^2-9y^2-8x+36y-68=0$.

Odrediti koordinate središta, poluose i žiže hiperbole a zatim je konstruisati.

Rešenje:

Vidimo da ova hiperbola nije centralna, središte joj nije u koordinatnom početku (0,0).

Ova hiperbola je oblika $\frac{(x-p)^2}{a^2}+\frac{(y-q)^2}{b^2}=1$ gde je C(p,q) centar hiperbole.

Njene žiže su $F_1(p-c,q)\wedge F_2(p+c,q)$

a asimptote se traže po formuli $y-q=\pm\frac{b}{a}(x-p)$.

Pakujemo hiperbolu:

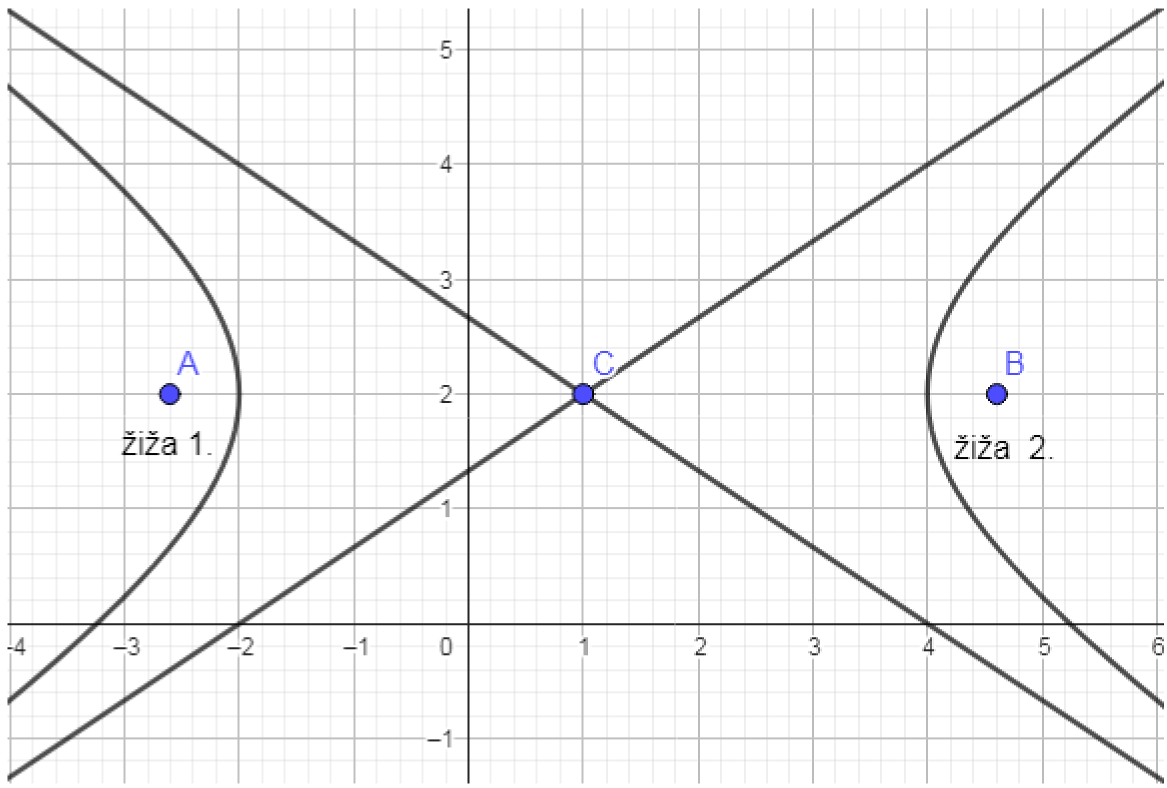
$$
\begin{aligned}
&4x^2-9y^2-8x+36y-68=0\\
&4x^2-8x-9y^2+36y-68=0\\
&4(x^2-2x)-9(y^2-4y)=68\\
&4(x^2-2x+1-1)-9(y^2-4y+4-4)=68\\
&4(x^2-2x+1)-4-9(y^2-4y+4)+36=68\\
&4(x-1)^2-9(y-2)^2=68-32\\
&4(x-1)^2-9(y-2)^2=36..../:36\\
&\frac{(x-1)^2}{9}-\frac{(y-2)^2}{4}=1\to a^2=9,b^2=4,p=1,q=2\to C(1,2)
\end{aligned}
$$

Tražimo koordinate žiža:

$$
\begin{aligned}
&c^2=a^2+b^2\to c^2=9+4\to c^2=13\to c=\pm\sqrt{13}\\
&F_1(p-c,q)\wedge F_2(p+c,q)\to F_1(1-\sqrt{13},2)\wedge F_2(1+\sqrt{13},2)\ \text{su žiže}
\end{aligned}
$$

Tražimo jednačine asimptota:

$$
\begin{aligned}
&y-q=\pm\frac{b}{a}(x-p)\\
&y-2=\pm\frac{2}{3}(x-1)\\
&y=\frac{2}{3}(x-1)+2\wedge y=-\frac{2}{3}(x-1)+2\\
&y=\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}+2\wedge y=-\frac{2}{3}x+\frac{2}{3}+2\\
&y=\frac{2}{3}x+\frac{4}{3}\wedge y=-\frac{2}{3}x+\frac{8}{3}\ \text{su asimptote}
\end{aligned}
$$



www.matematiranje.in.rs