Elipsa – razni zadaci

Primer 1.

Odrediti trajektoriju tačke M koja pri svom kretanju ostaje tri puta bliža tački A(1,0) nego pravoj x=9.

Rešenje:

Uzmimo da je tačka M(x,y). Rastojanje tačke M od tačke A(1,0) je:

$d(M,A)=\sqrt{(x-1)^2+(y-0)^2}=\sqrt{(x-1)^2+y^2}$ po formuli za rastojanje između dve tačke.

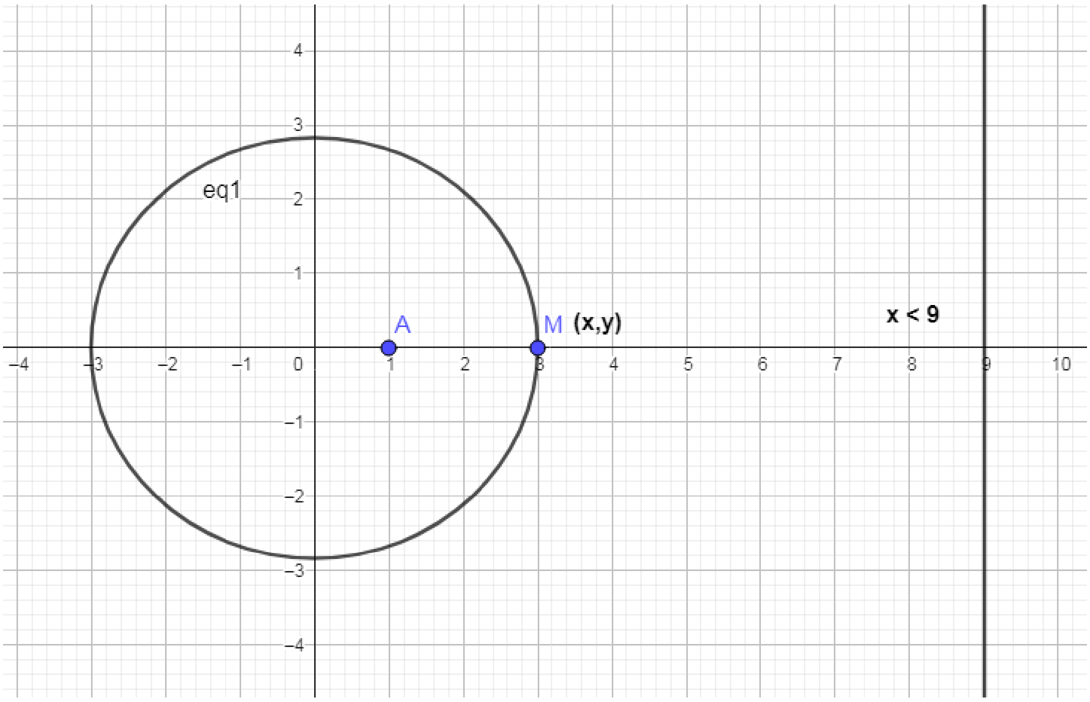
Rastojanje tačke M(x,y) od prave x-9=0 je

$d=\frac{|x-9|}{\sqrt{1^2+0^2}}=|x-9|$ po formuli rastojanje tačke od prave d= $\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Razmišljamo da će x koordinata te tačke biti manja od 9, pa je d = 9 – x

Po tekstu zadatka je:

$$3\sqrt{(x-1)^2+y^2}=9-x..../(\ )^2$$
$$9((x-1)^2+y^2)=(9-x)^2$$
$$9(x^2-2x+1)+9y^2=81-18x+x^2$$
$$9x^2\cancel{-18x}+9+9y^2=81\cancel{-18x}+x^2$$
$$8x^2+9y^2=72.../:72$$
$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{8}=1\rightarrow \text{Trajektorija te tačke je elipsa}$$



Primer 2.

Napisati jednačinu tangente elipse $2x^2+3y^2=35$ koja je normalna na pravu 3x-8y-24=0

Rešenje:

Naša tangenta je prava y = kx +n, k=? , n=?.

Spakujemo elipsu:

$$2x^2+3y^2=35 \ldots / :35$$
$$\frac{2x^2}{35}+\frac{3y^2}{35}=1$$
$$\frac{x^2}{\frac{35}{2}}+\frac{y^2}{\frac{35}{3}}=1 \rightarrow a^2=\frac{35}{2} \wedge b^2=\frac{35}{3}$$

Pravu prebacimo u eksplicitni oblik da pročitamo koeficijent pravca:

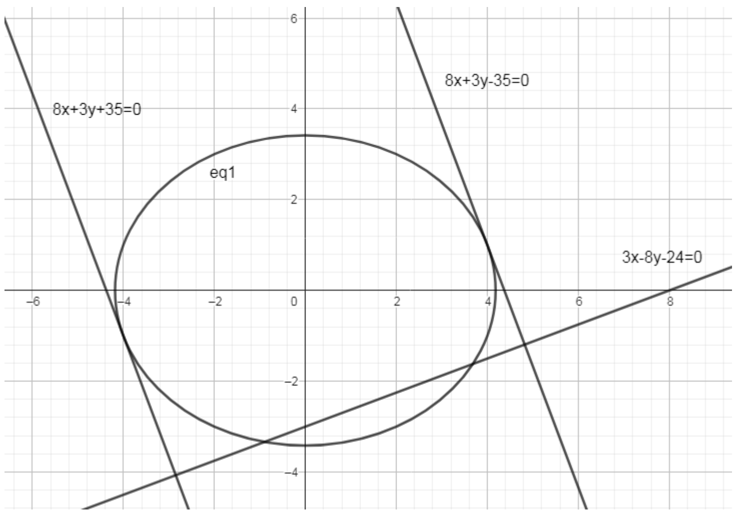
$$3x-8y-24=0$$
$$8y=3x-24$$
$$y=\frac{3}{8}x-3 \rightarrow k=\frac{3}{8}$$

Naša tangenta mora biti normalna na ovu pravu pa po uslovu normalnosti imamo:

$$k_2=-\frac{1}{k_1}=-\frac{1}{\frac{3}{8}}=-\frac{8}{3}$$

Uslov dodira će nam dati n:

$$a^2k^2+b^2=n^2$$
$$\left(\frac{35}{2}\right)\left(-\frac{8}{3}\right)^2+\left(\frac{35}{3}\right)=n^2$$
$$\left(\frac{35}{2}\right)\left(\frac{64}{9}\right)+\left(\frac{35}{3}\right)=n^2$$
$$n^2=\frac{1120}{9}+\frac{105}{9}$$
$$n^2=\frac{1225}{9} \rightarrow n=\pm\sqrt{\frac{1225}{9}}=\pm\frac{35}{3}$$
$$t_1: y=-\frac{8}{3}x+\frac{35}{3}$$
$$t_2: y=-\frac{8}{3}x-\frac{35}{3}$$



Primer 3.

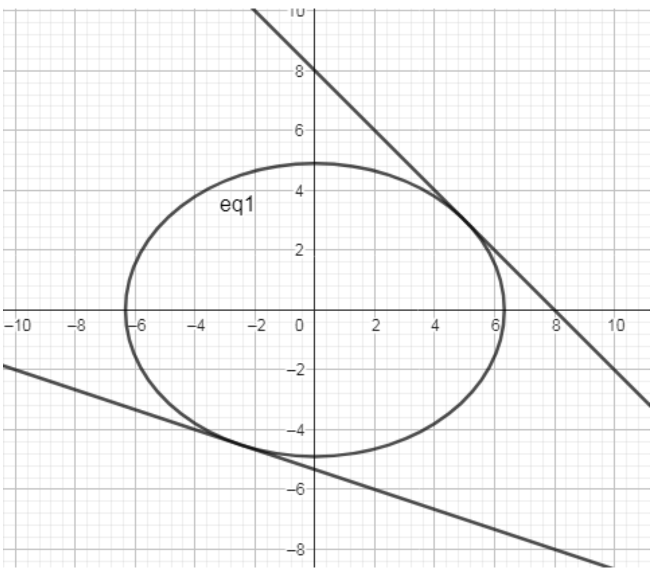
Napisati jednačinu elipse ako su poznate njene tangente x + y-8=0 i x+3y+16 =0

Rešenje:

Tangente moraju da zadovoljavaju uslov dodira, pa ćemo to iskoristiti da napravimo sistem jednačina.

$$x+y-8=0$$
$$y=-x+8 \rightarrow k=-1 \wedge n=8$$
$$x+3y+16=0$$
$$3y=-x-16$$
$$y=-\frac{1}{3}x-\frac{16}{3} \rightarrow k=-\frac{1}{3} \wedge n=-\frac{16}{3}$$
$$a^2k^2+b^2=n^2$$
$$a^2(-1)^2+b^2=8^2$$
$$\underline{a^2\left(-\frac{1}{3}\right)^2+b^2=\left(-\frac{16}{3}\right)^2}$$
$$a^2+b^2=64..../*(-1)$$
$$\underline{\frac{a^2}{9}+b^2=\frac{256}{9}} \rightarrow a^2+9b^2=256$$
$$-a^2-b^2=-64$$
$$\underline{a^2+9b^2=256}$$
$$8b^2=192$$
$$b^2=24 \rightarrow a^2=40$$

Jednačina elipse je $\frac{x^2}{40}+\frac{y^2}{24}=1$.



Primer 4.

Odrediti ugao pod kojim se vidi elipsa $x^2+3y^2=12$ iz tačke P(0,4) .

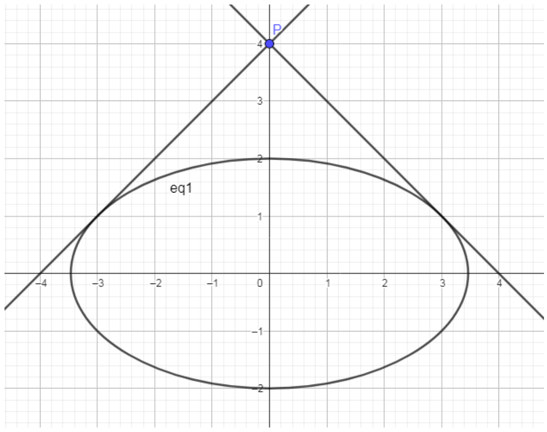
Rešenje:

Traženi ugao je ugao između tangenti postavljenih iz tačke P(0,4).

$$x^2+3y^2=12.../:12$$
$$\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{4}=1 \rightarrow a^2=12 \wedge b^2=4$$

Neka je naša tangenta y = kx + n i sadrži tačku (0,4),koordinate te tačke menjamo umesto x i y :

$$y = kx + n$$
$$4 = k \cdot 0 + n \to n = 4$$
uslov dodira
$$a^2k^2 + b^2 = n^2$$
$$12k^2 + 4 = 16$$
$$12k^2 = 12$$
$$k^2 = 1 \to k = \pm\sqrt{1} = \pm 1$$
$$k_1 = 1 \wedge k_2 = -1$$



Ne moramo tražiti celu tangentu, jer nama za ugao trebaju samo k-ovi. A kako oni zadovoljavaju uslov normalnosti $k_1k_2 = -1$ zaključujemo da se radi o uglu od 90^0.

Primer 5.

Napisati jednačinu one tetive elipse $16x^2 + 25y^2 = 400$ koja je prepolovljena tačkom M(2,1)

Rešenje:

Neka su te dve tačke na elipsi (x_1,y_1) i (x_2,y_2).

Tačka M(2,1) je sredina te duži pa mora da važi:

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = 2 \wedge \frac{y_1 + y_2}{2} = 1 \to x_1 + x_2 = 4 \wedge y_1 + y_2 = 2$$

Tačke (x_1,y_1) i (x_2,y_2) zadovoljavaju jednačinu elipse pa mora biti:

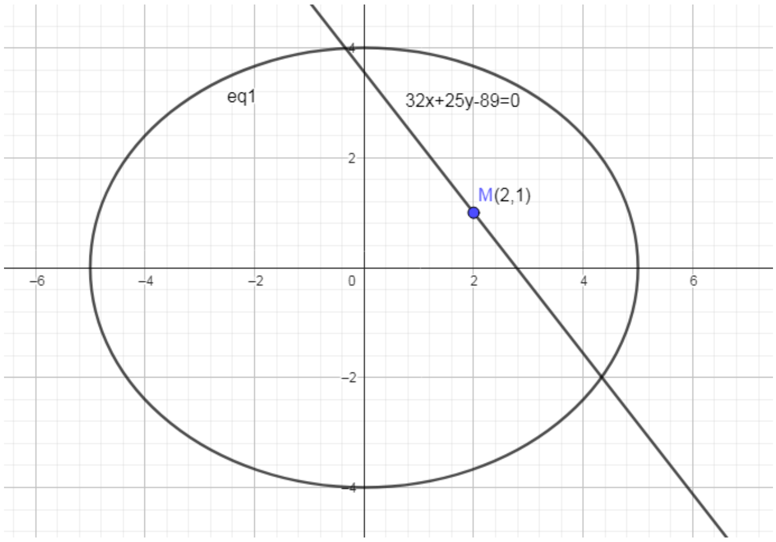
$$16x_1^2 + 25y_1^2 = 400 \wedge 16x_2^2 + 25y_2^2 = 400$$

Sad da iskombinujemo ove četiri jednakosti da nađemo koeficijent pravca tražene jednačine tetive.

$$16x_1^2 + 25y_1^2 = 16x_2^2 + 25y_2^2$$
$$16x_1^2 - 16x_2^2 = 25y_2^2 - 25y_1^2$$
$$16(x_1^2 - x_2^2) = 25(y_2^2 - y_1^2) \text{ razlike kvadrata}$$
$$16(x_1 - x_2)\boxed{(x_1 + x_2)} = 25(y_2 - y_1)\boxed{(y_2 + y_1)} \text{ ovo znamo koliko je ...}$$
$$16(x_1 - x_2) \cdot 4 = 25(y_2 - y_1) \cdot 2$$
$$\frac{32}{25} = \frac{y_2 - y_1}{x_1 - x_2} \text{ mora puta -1 da okrenemo x-seve}$$
$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = -\frac{32}{25}$$

Dalje radimo kao jednačina prave kroz tačku M(2,1)

$$y - y_1 = k(x - x_1)$$
$$y - 1 = -\frac{32}{25}(x - 2)$$
$$y = -\frac{32}{25}x + \frac{64}{25} + 1$$
$$y = -\frac{32}{25}x + \frac{89}{25}$$



Primer 6.

Data je jednačina elipse $4x^2 + 9y^2 - 8x - 36y + 4 = 0$.

Odrediti koordinate središta , poluose , žiže elipse i konstruisati je.

Rešenje:

Vidimo da ova elipsa nije centralna, to jest središte joj nije u tački (0,0).

Ova elipsa je $\frac{(x-p)^2}{a^2} + \frac{(y-q)^2}{b^2} = 1$ gde je (p,q) centar elipse.

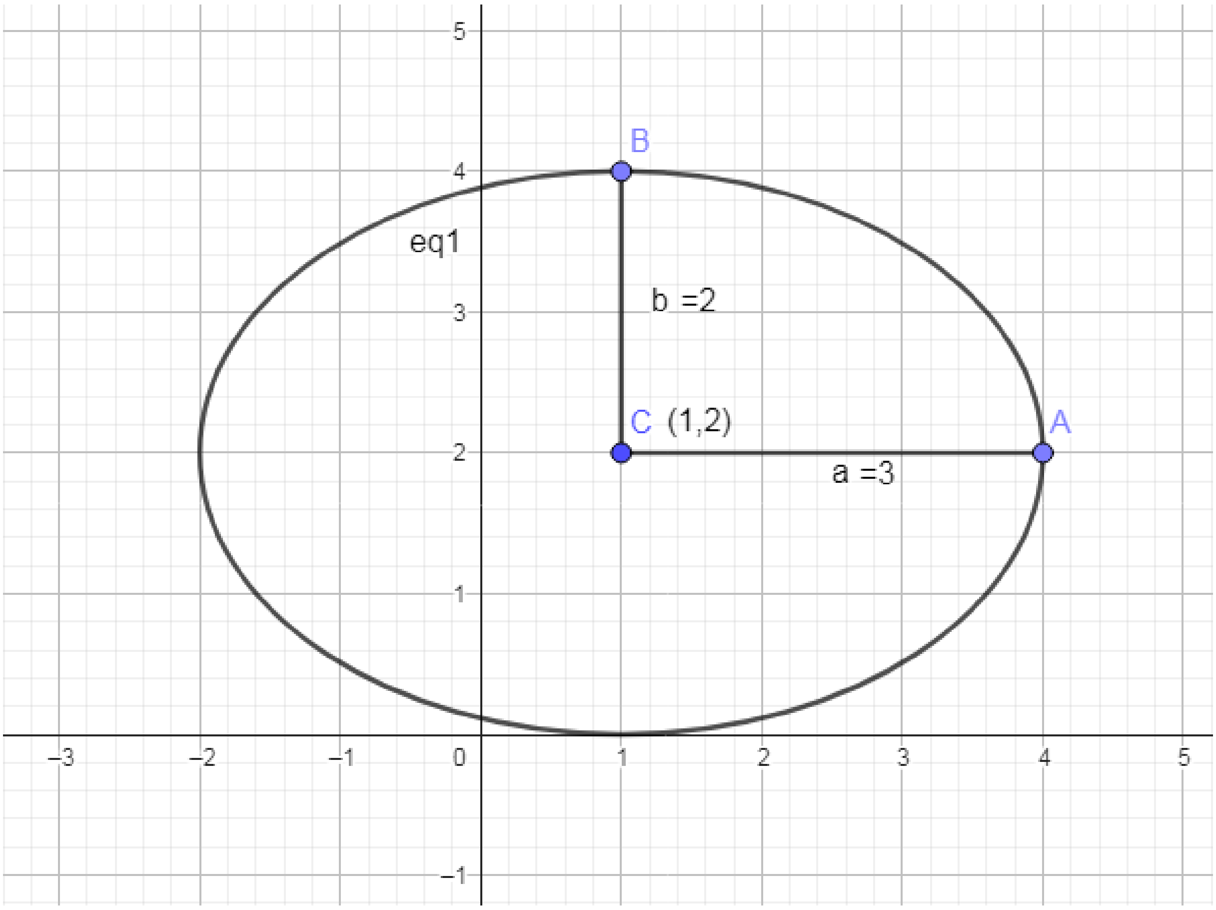
Njene žiže su $F_1(p-c,q) \wedge F_2(p+c,q)$.

Da je upakujemo:

$$4x^2 + 9y^2 - 8x - 36y + 4 = 0$$
$$4x^2 - 8x + 9y^2 - 36y = -4$$
$$4(x^2 - 2x) + 9(y^2 - 4y) = -4$$
$$4(x^2 - 2x + 1 - 1) + 9(y^2 - 4y + 4 - 4) = -4$$
$$4(x^2 - 2x + 1) \cancel{-4} + 9(y^2 - 4y + 4) - 36 = \cancel{-4}$$
$$4(x-1)^2 + 9(y-2)^2 = 36 \ldots / : 36$$
$$\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{4} = 1 \rightarrow p = 1, q = 2, a^2 = 9, b^2 = 4$$

$$c^2 = a^2 - b^2$$
$$c^2 = 9 - 4 = 5$$ su žiže.
$$c = \pm\sqrt{5} \rightarrow F_1(1-\sqrt{5}, 2) \wedge F_2(1+\sqrt{5}, 2)$$

Da pogledamo i sliku:



Primer 7.

Data je elipsa $x^2+4y^2+4x-16y+8=0$.

Odrediti koordinate središta , poluose , žiže elipse i konstruisati je.

Rešenje:

$$x^2+4y^2+4x-16y+8=0$$
$$x^2+4x+4y^2-16y+8=0$$
$$x^2+4x+4-4+4(y^2-4y)+8=0$$
$$(x+2)^2+4(y^2-4y+4-4)=-4$$
$$(x+2)^2+4(y^2-4y+4)-16=-4$$
$$(x+2)^2+4(y-2)^2=12$$
$$\frac{(x+2)^2}{12}+\frac{(y-2)^2}{3}=1 \rightarrow p=-2, q=2, a^2=12, b^2=3$$

Centar ove elipse je u tački (-2,2)

$c^2 = a^2 - b^2$

$c^2 = 12 - 3 = 9$ su žiže.

$c = \pm\sqrt{9} = \pm 3 \rightarrow F_1(-2-3, 2) \wedge F_2(-2+3, 2) \rightarrow F_1(-5, 2) \wedge F_2(1, 2)$