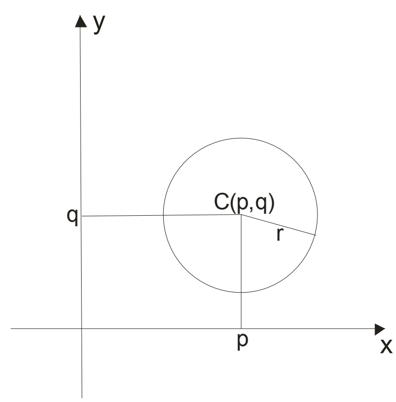
KRUŽNICA

Kružnica (kružna linija) je skup tačaka u ravni sa osobinom da su sve tačke tog skupa na jednakom rastojanju (r) od jedne stalne tačke (C, centar) te ravni.

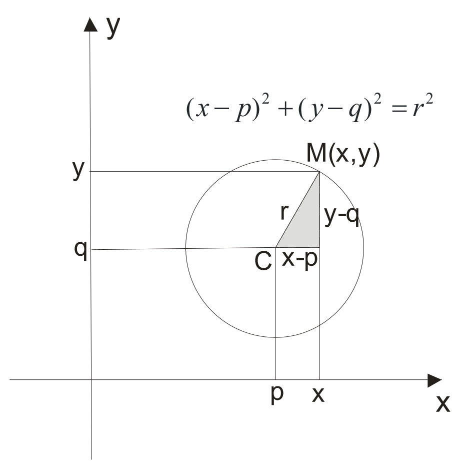
Kružnica je dakle određena tačkom C i pozitivnim brojem r (poluprečnikom).



Opšta jednačina kružnice je: $(x-p)^2+(y-q)^2=r^2$

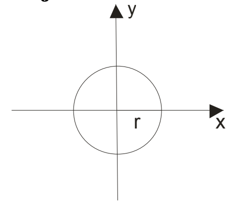
Odakle ona?

Posmatrajmo sliku:



Tačka M(x,y) je na kružnici. Uočimo pravougli trougao na slici. Primena Pitagorine teoreme nam daje traženu jednačinu kružnice.

Ako je p = 0 i q = 0 onda se radi o **centralnoj** kružnici.



$x^2+y^2=r^2$

Kako " spakovati" kružnicu ako je data u drugom obliku ?

Ima dva načina.

I način

Ako je kružnica data u obliku $x^2+y^2+dx+ey+f=0$ možemo koristiti formulice

$$p=-\frac{d}{2}$$

$$q=-\frac{e}{2}$$

$$r^2=p^2+q^2-f$$

Primer 1.

Odrediti koordinate centra i poluprečnik kružnice $x^2+y^2+6x-4y-12=0$

Uporedimo $x^2+y^2+6x-4y-12=0$ sa $x^2+y^2+dx+ey+f=0$ i imamo d = 6, e = - 4 i f = - 12

Dalje koristimo formule

$$p=-\frac{d}{2}=-\frac{6}{2}=-3$$

$$q=-\frac{e}{2}=-\frac{-4}{2}=2$$

$$r^2=p^2+q^2-f=(-3)^2+2^2-(-12)=25$$

Ovo zamenimo u jednačinu kružnice $(x-p)^2+(y-q)^2=r^2$ i dobijamo

$$(x-p)^2+(y-q)^2=r^2$$

$$(x-(-3))^2+(y-2)^2=25$$

$$(x+3)^2+(y-2)^2=25$$

II način

Vršimo dopunu do punog kvadrata!

$x^2+y^2+6x-4y-12=0$ Najpre pretumbamo , svi sa x, pa sa y, pa brojevi...

$x^2+6x+y^2-4y-12=0$ Pazi, uvek dodajemo $(\frac{\text{onaj uz x}}{2})^2$ i to isto oduzmemo , pa tako i za y. $(\frac{\text{onaj uz y}}{2})^2$

$$x^2+6x+(\frac{6}{2})^2-(\frac{6}{2})^2+y^2-4y+(\frac{4}{2})^2-(\frac{4}{2})^2-12=0$$

$\underline{x^2+6x+9}-9+\underline{y^2-4y+4}-4-12=0$ Sad sklopimo pune kvadrate a brojke prebacimo na desnu stranu...

$$(x+3)^2+(y-2)^2=25$$

Vi odaberite sami šta vam je lakše…

Primer2.

Napisati jednačinu kružnice koja sadrži tačke A(5,6), B(-3,2) i C(-2,-1).

I ovaj tip zadatka možete rešavati na dva načina.

<u>I način</u>

Koristimo " rasklopljeni" oblik kružnice $x^2+y^2+dx+ey+f=0$ i umesto x i y menjamo koordinate datih tačaka, oformimo sistem tri jednačine sa tri nepoznate i rešimo ga...

$$\begin{array}{lll}
A(5,6)\to x^2+y^2+dx+ey+f=0 & B(-3,2)\to x^2+y^2+dx+ey+f=0 & C(-2,-1)\to x^2+y^2+dx+ey+f=0 \\
5^2+6^2+d\cdot 5+e\cdot 6+f=0 & (-3)^2+2^2+d\cdot(-3)+e\cdot 2+f=0 & (-2)^2+(-1)^2+d\cdot(-2)+e\cdot(-1)+f=0 \\
5d+6e+f=-25-36 & -3d+2e+f=-9-4 & -2d-e+f=-4-1 \\
5d+6e+f=-61 & -3d+2e+f=-13 & -2d-e+f=-5
\end{array}$$

Evo tri jednačina, prelazimo u sistem…

$$\begin{array}{l}
5d+6e+f=-61 \\
-3d+2e+f=-13 \\
-2d-e+f=-5
\end{array}$$

Sistem rešite na način koji obožavate ...(imate u I godini fajl sistemi pa se podsetite...)

Dobijamo rešenja $d=-4, e=-4, f=-17$ i to zamenimo u $x^2+y^2+dx+ey+f=0$

$$x^2+y^2-4x-4y-17=0$$

$$x^2-4x+(\frac{4}{2})^2-(\frac{4}{2})^2+y^2-4y+(\frac{4}{2})^2-(\frac{4}{2})^2-17=0$$

$$\underline{x^2-4x+4}-4+\underline{y^2-4y+4}-4-17=0$$

$$(x-2)^2+(y-2)^2=25$$

<u>II način</u>

Date tačke A(5,6), B(-3,2) i C(-2,-1) direktno menjamo u jednačinu kružnice : $(x-p)^2+(y-q)^2=r^2$

$$\begin{array}{lll}
\mathrm{A}(5,6)\to(x-p)^2+(y-q)^2=r^2 & B(-3,2)\to(x-p)^2+(y-q)^2=r^2 & C(-2,-1)\to(x-p)^2+(y-q)^2=r^2 \\
(5-p)^2+(6-q)^2=r^2 & (-3-p)^2+(2-q)^2=r^2 & (-2-p)^2+(-1-q)^2=r^2
\end{array}$$

Dobili smo dakle sistem:

$(5-p)^2+(6-q)^2=r^2$
$(-3-p)^2+(2-q)^2=r^2$
$(-2-p)^2+(-1-q)^2=r^2$

Kako je kod sve tri jednačine desna strana ista, uporedimo leve strane, recimo prve i druge , pa prve i treće jednačine.

$(5-p)^2+(6-q)^2=(-3-p)^2+(2-q)^2$
$25-10p+p^2+36-12q+q^2=9+6p+p^2+4-4q+q^2$
$25-10p+36-12q=9+6p+4-4q$
$-16p-8q=-48$
$2p+q=6$

$(5-p)^2+(6-q)^2=(-2-p)^2+(-1-q)^2$
$25-10p+p^2+36-12q+q^2=4+4p+p^2+1+2q+q^2$
$25-10p+36-12q=4+4p+1+2q$
$-14p-14q=-56$
$p+q=4$

Sad oformimi sistem od dve jednačine sa dve nepoznate

$2p+q=6$
$\underline{p+q=4}$
$p=2$
$q=2$

Vratimo se u jednu od prve tri jednačine da nadjemo poluprečnik r

$(5-p)^2+(6-q)^2=r^2$
$(5-2)^2+(6-2)^2=r^2$
$9+16=r^2$
$r^2=25$
$r=5$

I dobili smo jednačinu tražene kružnice

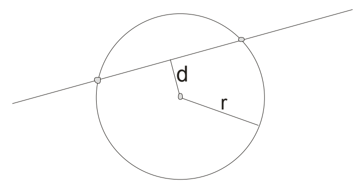
$(x-2)^2+(y-2)^2=25$

Vi odaberite koji vam je način jasniji i radite po njemu ili onako kako vaš profesor zahteva…

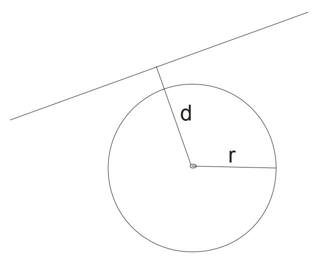
Prava i kružnica

Za uzajamni položaj prave i kružnice u ravni postoje tri mogućnosti:

i)
Prava i kružnica imaju dve zajedničke tačke. Ovo je situacija kada je rastojanje od centra kružnice do prave manje od poluprečnika kružnice.

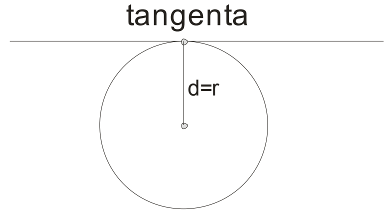


ii)
Prava i kružnica nemaju zajedničkih tačaka. Ovde je rastojanje od centra kružnice do prave veće od poluprečnika kružnice.



iii)

Prava i kružnica imaju jednu zajedničku tačku. Ovde je rastojanje od centra kružnice do prave jednako sa poluprečnikom i tada se prava zove TANGENTA .



Ispitivanje odnosa prave i kružnice svodi se na rešavanje sistema od jedne linearne i jedne kvadratne jednačine.

Posmatrajmo pravu $y = kx + n$ i kružnicu $(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2$

Umesto y u jednačini kružnice zamenimo $kx + n$ i posle sredjivanja izvodimo sledeći zaključak:

i) Ako je $r^2(k^2+1) - (kp-q+n)^2 > 0$ prava i kružnica imaju dve zajedničke tačke
ii) Ako je $r^2(k^2+1) - (kp-q+n)^2 < 0$ prava i kružnica nemaju zajedničkih tačaka
iii) Ako je $r^2(k^2+1) - (kp-q+n)^2 = 0$ prava i kružnica imaju jednu zajedničku tačku

Situacija kad prava i kružnica imaju jednu zajedničku tačku se još naziva i

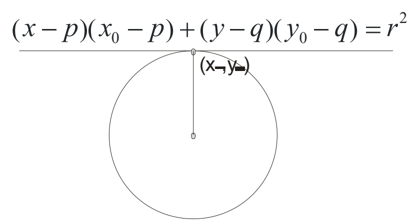
USLOV DODIRA : $r^2(k^2+1)=(kp-q+n)^2$

Napomena :

Ako tražimo tangentu iz neke tačke VAN kružnice neophodno je koristiti uslov dodira. Ali ako trebamo naći

tangentu baš u tački dodira čije koordinate znamo možemo koristiti gotovu formulicu:

$$(x-p)(x_0-p)+(y-q)(y_0-q)=r^2$$



Primer 3.

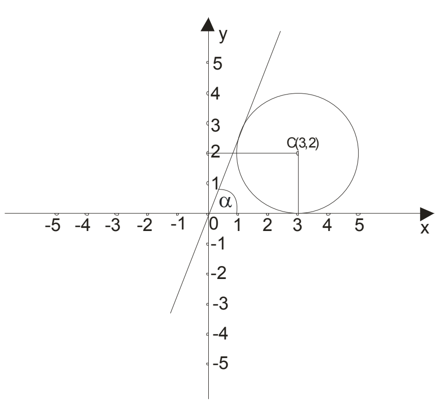
Iz koordinatnog početka povučene su tangente na kružnicu $x^2+y^2-6x-4y+9=0$. *Naći njihove jednačine i ugao između njih.*

Najpre sredimo kružnica da možemo pročitati p,q i r.

$$x^2+y^2-6x-4y+9=0$$
$$x^2-6x+y^2-4y+9=0$$
$$\underline{x^2-6x+9}-9+\underline{y^2-4y+4}-4+9=0$$
$$(x-3)^2+(y-2)^2=4$$

p = 3, q = 2 , r = 2

Skicirajmo sada problem kada znamo kako izgleda kružnica:



Sa skice možemo zaključiti da je jedna tangenta sama x osa, dakle prava y = 0.

Ali , ajde da do toga dodjemo i računski.

Neka je prava(prave) koju tražimo $y = kx + n$. Ovde menjamo koordinate tačke iz koje postavljamo tangentu, dakle O(0,0).

$$y = kx + n$$
$$0 = k \cdot 0 + n$$
$$n = 0$$

Dobili smo da je n = 0.

k tražimo iz uslova dodira.

$$r^2(k^2+1) = (kp - q + n)^2$$
$$4(k^2+1) = (3k - 2 + 0)^2$$
$$4k^2 + 4 = 9k^2 - 12k + 4$$
$$5k^2 - 12k = 0$$
$$k(5k - 12) = 0$$
$$k = 0 \vee k = \frac{12}{5}$$

Dakle tražene tangente su :

$$t_1 : y = 0$$
$$t_2 : y = \frac{12}{5}x$$

Ugao tražimo preko poznate formule za ugao između dve prave

$$tg\alpha = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}\right|$$
$$tg\alpha = \left|\frac{0 - \frac{12}{5}}{1 + 0 \cdot \frac{12}{5}}\right|$$
$$tg\alpha = \frac{12}{5}$$
$$\alpha = arctg\frac{12}{5}$$