TAČKA i PRAVA

Najpre ćemo se upoznati sa osnovnim formulama i njihovom primenom.

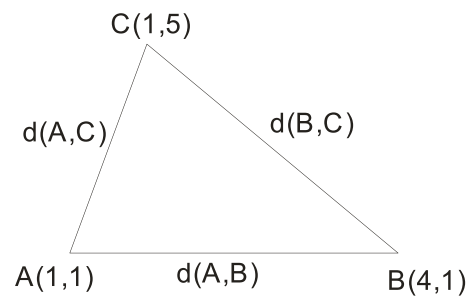
1. Rastojanje između dve tačke

Ako su nam date tačke $A(x_1, y_1)$ i $B(x_2, y_2)$, onda rastojanje između njih računamo po formuli

$$d(A,B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Primer1.

Odrediti dužine stranica trougla čija su temena A(1,1) , B(4,1) i C(1,5)



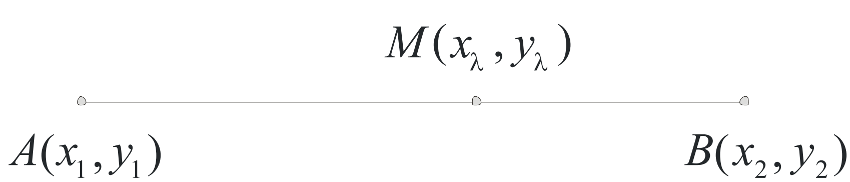
Da vas ne zbuni, nema veze da li ćete obeležiti d(A,B) ili d(B,A) jer je rešenje isto.

$$d(A,B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$
$$d(A,B) = \sqrt{(4-1)^2 + (1-1)^2} = \sqrt{9+0} = 3$$
$$d(A,C) = \sqrt{(1-1)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{0+16} = 4$$
$$d(B,C) = \sqrt{(1-4)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{9+16} = 5$$

2. Deljenje duži u datoj razmeri

Ako je tačka $M(x_\lambda, y_\lambda)$ unutrašnja tačka duži AB, gde je $A(x_1, y_1)$ i $B(x_2, y_2)$ i ako je data razmera $AM : MB = \lambda$ to jest $(\frac{AM}{MB} = \lambda)$, u kojoj tačka M deli duž AB , onda se koordinate tačke M računaju po obrascima

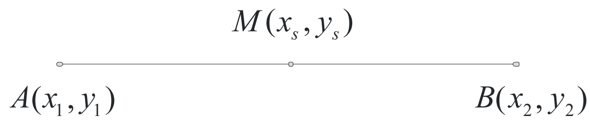
$$M(x_\lambda, y_\lambda) \to x_\lambda = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda} \quad \text{i} \quad \mathrm{y}_\lambda = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}$$



3. <u>Sredina duži</u>

Ako je tačka $M(x_s, y_s)$ sredina duži AB ($A(x_1, y_1)$ i $B(x_2, y_2)$) onda se njene koordinate računaju po formuli

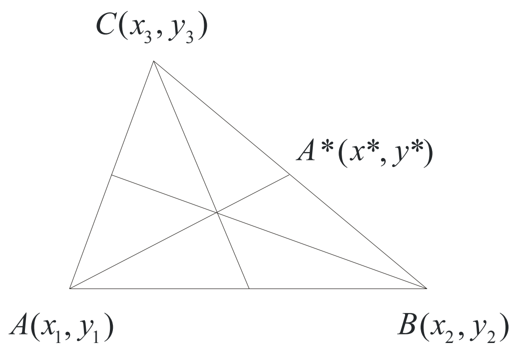
$$M(x_s, y_s) \to x_s = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad \text{i} \quad y_s = \frac{y_1 + y_2}{2}$$



Primer 2.

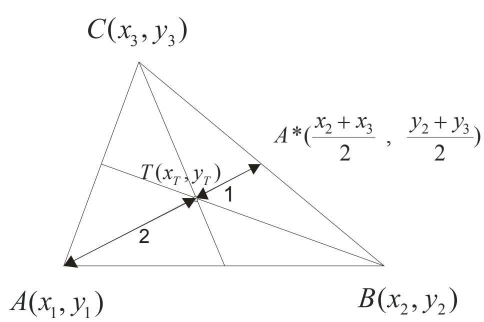
Izvesti formule za koordinate težišta trougla!

Da se podsetimo, težište se nalazi u preseku težišnih duži i težište deli težišnu duž u odnosu 2 : 1.



Najpre ćemo naći koordinate tačke $A^*(x^*, y^*)$ kao sredinu duži BC.

$$A^*(x^*, y^*) \to x^* = \frac{x_2 + x_3}{2} \quad \text{i} \quad y^* = \frac{y_2 + y_3}{2}$$



Dalje ćemo iskoristiti formulu za deljenje duži u datoj razmeri , gde je AT : TA* = 2 : 1 = 2

$$T(x_T, y_T) \to x_T = \frac{x_1 + 2(\frac{x_2 + x_3}{2})}{1 + 2} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \quad \text{i} \quad y_T = \frac{y_1 + 2(\frac{y_2 + y_3}{2})}{1 + 2} = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$$

4. Površina trougla preko koordinata temena

Neka su $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ i $C(x_3, y_3)$ temena datog trougla ABC određena pomoću naznačenih koordinata u odnosu na pravougli koordinatni sistem xOy, tada je površina trougla data obrascem

$$P_\triangle = \frac{1}{2}\left|x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\right|$$

može i preko determinante(naravno, ko je upoznat sa njihovim izračunavanjem)

$$P_\triangle = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

Apsolutna vrednost je tu da nam obezbedi da rešenje ne bude negativno, jer površina ne može biti negativan broj.

Primer 3.

Izračunati površinu trougla ABC ako je A(-2,3) ; B(8,-2) i C(3,8)

$$P_\triangle = \frac{1}{2}\left|x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\right|$$
$$P_\triangle = \frac{1}{2}\left|-2(-2-8) + 8(8-3) + 3(3-(-2))\right|$$
$$P_\triangle = \frac{1}{2}\left|-2(-10) + 8\cdot 5 + 3(3+2)\right|$$
$$P_\triangle = \frac{1}{2}\left|20 + 40 + 15\right|$$
$$P_\triangle = \frac{1}{2}\left|75\right|$$
$$P_\triangle = 37,5$$

PRAVA

i) **opšti (implicitni oblik) je** $ax+by+c=0$

ii) **eksplicitni oblik je** $y=kx+n$

Ovaj oblik nam je najbitniji jer se koristi u mnogim formulama. U njemu je :

k- koeficijent pravca ($k=tg\alpha$, gde je α ugao koji prava gradi sa pozitivnim smerom x – ose)

n - je odsečak na y - osi

Kako preći iz opšteg u eksplicitni oblik?

$ax+by+c=0 \rightarrow$ sve sa y ostavimo levo a ostale prebacimo desno
$by=-ax-c \rightarrow$ sad sve podelimo sa b

$$y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$$

Odavde je $k=-\frac{a}{b}$ i $n=-\frac{c}{b}$

Primer 4.

Pravu 7x+3y + 23=0 prebaciti u eksplicitni oblik i naći k i n

$7x+3y+23=0 \rightarrow$ sve sa y ostavimo levo a ostale prebacimo desno
$3y=-7x-23 \rightarrow$ sad sve podelimo sa 3

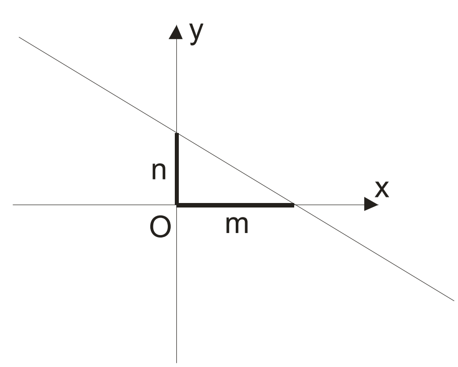
$$y=-\frac{7}{3}x-\frac{23}{3}$$

Odavde je $k=-\frac{7}{3}$ i $n=-\frac{23}{3}$

iii) $\frac{x}{m}+\frac{y}{n}=1$ **je segmentni oblik**

m – je odsečak na x osi

n – je odsečak na y osi



Primer 5.

U jednačini $px+(p+1)y-8=0$ *odrediti parametar p , tako da prava gradi dva puta veći odsečak na apscisnoj osi nego na ordinatnoj osi.*

Prava gradi dva puta veći odsečak na apscisnoj osi nego na ordinatnoj osi , znači $m=2n$

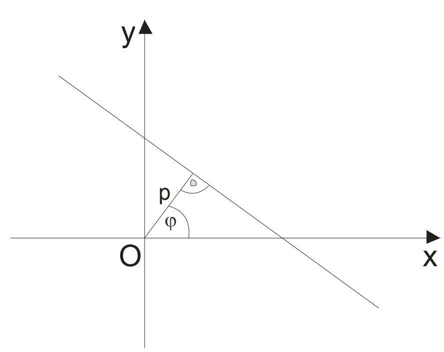
Sredimo datu jednačinu prave da bi iz nje mogli da pročitamo m i n.

$$px+(p+1)y-8=0$$
$$px+(p+1)y=8 \quad \text{sve podelimo sa 8}$$
$$\frac{px}{8}+\frac{(p+1)y}{8}=1 \quad \text{oslobodimo x i y}$$
$$\frac{x}{\frac{8}{p}}+\frac{y}{\frac{8}{p+1}}=1 \rightarrow \quad \text{odavde je } m=\frac{8}{p} \quad \text{i} \quad n=\frac{8}{p+1}$$

Sad ovo zamenimo u $m=2n$

$$m=2n$$
$$\frac{8}{p}=2\cdot\frac{8}{p+1}$$
$$\frac{8}{p}=\frac{16}{p+1}$$
$$16p=8(p+1)$$
$$16p=8p+8$$
$$16p-8p=8$$
$$8p=8$$
$$p=1$$

iv) $x\cos\varphi+y\sin\varphi=p$ **je normalni oblik** jednačine prave



U ovoj jednačini je :

p je normalno rastojanje od koordinatnog početka (0,0) do naše prave

φ je ugao koji rastojanje p gradi sa pozitivnim smerom x ose

Formula za prelazak iz opšteg u normalni oblik je :

$$ax+by+c=0 \to \frac{ax+by+c}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}=0$$

ali pazimo, ispred korena uzimamo znak suprotan od znaka broja c .

Primer 6.

Svedi jednačinu 4x – 3y +5 = 0 na normalni oblik.

$4x-3y+5=0 \to \dfrac{4x-3y+5}{-\sqrt{4^2+3^2}}=0$ (minus ispred korena jer je c=5)

$\dfrac{4x-3y+5}{-\sqrt{25}}=0 \to \dfrac{4x-3y+5}{-5}=0 \to -\dfrac{4}{5}x+\dfrac{3}{5}y-1=0$ a odavde je :

p=1, $\cos\varphi=-\dfrac{4}{5}$, $\sin\varphi=\dfrac{3}{5}$

v) **Prava kroz tačku** $A(x_1,y_1)$ sa koeficijentom pravca k je : $y-y_1=k(x-x_1)$

vi) **Prava kroz tačke** $A(x_1,y_1)$ **i** $B(x_2,y_2)$ je : $y-y_1=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$

Primećujete da je onda $k=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

Kakav može biti međusoban položaj dve prave u ravni?

1) Mogu da se seku

Tačku preseka nalazimo rešavajući sistem od te dve jednačine !

Ako posmatramo prave $y=k_1x+n_1$ i $y=k_2x+n_2$ onda je ugao pod kojim se seku dat formulom:

$$tg\alpha=\left|\frac{k_2-k_1}{1+k_1\cdot k_2}\right|$$

Ako se te dve prave seku pod pravim uglom, onda je $k_1\cdot k_2=-1$ **(uslov normalnosti)**

2) Mogu da budu paralelne

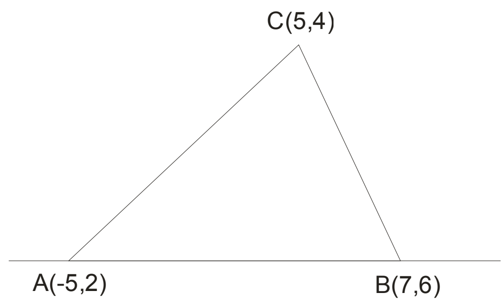
Prave $y=k_1x+n_1$ i $y=k_2x+n_2$ su paralelne ako je $k_1=k_2$ **(uslov paralelnosti)**

Primer 7.

Data su temena trougla A(-5,-2), B(7,6), C(5,4). Odrediti:

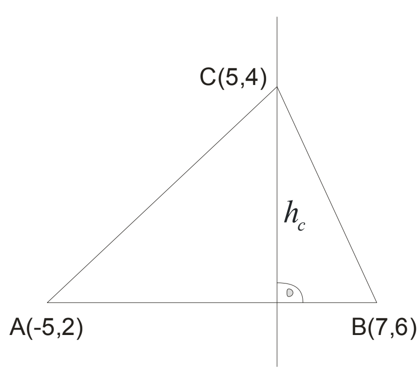
a) jednačinu stranice AB
b) jednačinu visine h_c
c) ugao kod temena A

a) Upotrebićemo formulu za jednačinu prave kroz dve tačke(A i B)



$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$
$$y - (-2) = \frac{6-(-2)}{7-(-5)}(x - (-5))$$
$$y + 2 = \frac{6+2}{7+5}(x+5)$$
$$y + 2 = \frac{8}{12}(x+5)$$
$$y + 2 = \frac{2}{3}(x+5)$$
$$y = \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}\cdot 5 - 2$$
$$y = \frac{2}{3}x + \frac{10}{3} - \frac{6}{2}$$
$$y = \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}$$

b)



Jednačinu visine h_c ćemo naći kao jednačinu prave kroz jednu tačku C(5,4) a njen koeficijent pravca mora da zadovoljava uslov normalnosti sa pravom AB.

Koeficijent pravca prave AB : $y = \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}$ je $k_1 = \frac{2}{3}$. Naša prava je normalna na AB, pa je :

$$k_2 = -\frac{1}{k_1} \qquad y - y_1 = k(x - x_1)$$

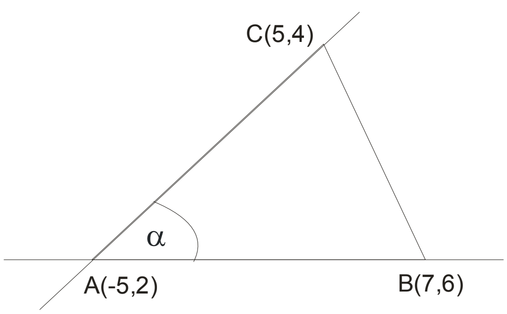
$$k_2 = -\frac{1}{\frac{2}{3}} \qquad y - 4 = -\frac{3}{2}(x-5)$$

$$k_2 = -\frac{3}{2} \qquad y = -\frac{3}{2}x + \frac{15}{2} + 4$$

$$y = -\frac{3}{2}x + \frac{23}{2}$$

c) Ugao kod temena A je ustvari ugao između pravih AB i AC. Čim nam traže neki ugao koristimo obrazac

$$tg\alpha = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2} \right|$$



Iz prave AB već imamo koeficijent pravca $k_1 = \frac{2}{3}$.

Ne moramo tražiti celu jednačinu prave AC već samo njen koeficijent pravca.

A(-5,-2), C(5,4) menjamo u $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$$k_2 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$k_2 = \frac{4-(-2)}{5-(-5)}$$

$$k_2 = \frac{6}{10}$$

$$k_2 = \frac{3}{5}$$

$$tg\alpha = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}\right|$$

$$tg\alpha = \left|\frac{\frac{3}{5} - \frac{2}{3}}{1 + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{3}}\right|$$

$$tg\alpha = \left|\frac{-\frac{1}{15}}{1 + \frac{6}{15}}\right|$$

$$tg\alpha = \left|\frac{-\frac{1}{15}}{\frac{21}{15}}\right|$$

$$tg\alpha = \frac{1}{21}$$

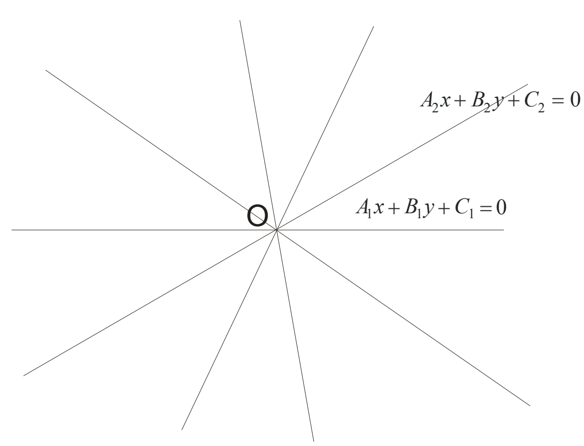
$$\alpha = arctg\frac{1}{21}$$

Pramen pravih

Ako su $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ i $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ jednačine dveju pravih koje se seku u tački O, tada je :

$$A_1x + B_1y + C_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2) = 0$$

jednačina pramena pravih sa centrom u tački O.



Znači, da bi opisali pramen pravih , potrebne su nam dve prave iz tog pramena.

Odstojanje tačke $A(x_1, y_1)$ od prave $ax+by+c=0$ dato je formulom:

$$d=\frac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Primer 8.

U pramenu pravih $2x+y+4+\lambda(x-2y-3)=0$ *odrediti pravu čije odstojanje od tačke P(2,-3) iznosi* $\sqrt{10}$.

Najpre prepakujemo jednačinu pramena:

$2x+y+4+\lambda(x-2y-3)=0$
$2x+y+4+\lambda x-2\lambda y-3\lambda=0$ upakujemo one uz x, pa uz y, pa slobodne ...
$(2+\lambda)x+(1-2\lambda)y+4-3\lambda=0$
Odavde možemo videti da je $a=2+\lambda, \quad b=1-2\lambda$

Sad uzimamo formulu za rastojanje tačke od prave

$$d=\frac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$d=\frac{|(2+\lambda)\cdot 2+(1-2\lambda)\cdot(-3)+4-3\lambda|}{\sqrt{(2+\lambda)^2+(1-2\lambda)^2}}$$

$$\sqrt{10}=\frac{|4+2\lambda-3+6\lambda+4-3\lambda|}{\sqrt{4+4\lambda+\lambda^2+1-4\lambda+4\lambda^2}}$$

$$\sqrt{10}=\frac{|5\lambda+5|}{\sqrt{5\lambda^2+5}}$$

Odavde sredjivanjem dobijamo dva rešenja: $\lambda_1=1$, $\lambda_2=-\frac{9}{10}$

Kad ova rešenja vratimo u pramen $2x+y+4+\lambda(x-2y-3)=0$ dobijamo tražene prave:

3x – y + 1 = 0

11x + 28 y +67 = 0