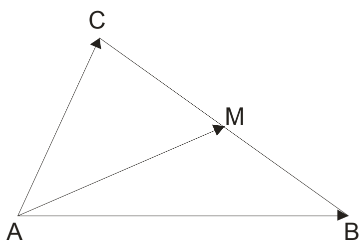
VEKTORI U RAVNI – II DEO

Primer 1.

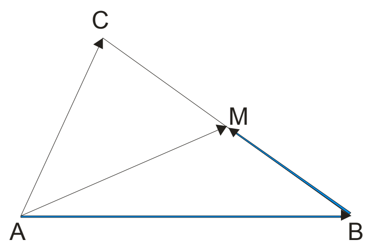
Tačka M je središte stranice BC trougla ABC. Dokazati da je $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AM}$

Rešenje:

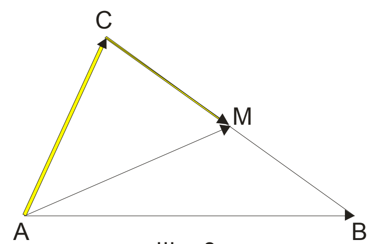
Nacrtajmo najpre sliku i postavimo problem...



slika 1.



slika 2.



slika 3.

Na slici 1. su obeleženi vektori koji su dati u zadatku.

Šta je ideja?

Kod ovakvog tipa zadataka vektor u sredini izrazimo na obe strane!

Na slici 2. je vektor AM izražen (plavom putanjom) preko: $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}$.

Na slici 3. je vekor AM izražen (žuta putanja) preko: $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CM}$

Dalje ćemo ove dve jednakosti napisati jednu ispod druge i sabrati ih:

$$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}$$
$$\underline{\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CM}}$$
$$2\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CM}$$ pretumbamo malo
$$2\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{BM}$$ pogledajmo zadnja dva vektora na slici...suprotni su , pa je $\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{BM}=0$
$$2\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$$

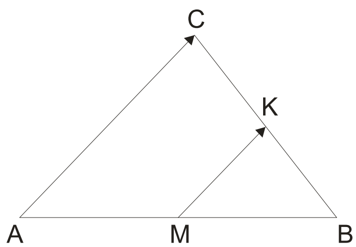
Dobili smo traženu jednakost.

Primer 2.

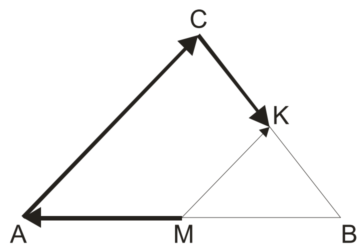
U trouglu ABC tačke M i K su središta stranica AB i BC. Dokazati da je $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{MK}$

Rešenje:

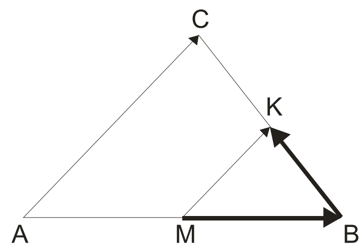
Opet mora slika:



slika 1.



slika 2.



slika 3.

Slično kao u prethodnom zadatku, vektor u sredini MK, izražavamo na obe strane.

Na slici 2. idemo ulevo: $\overrightarrow{KM} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CK}$

Na slici 3. idemo udesno: $\overrightarrow{KM} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BK}$

Napišemo jednakosti jednu ispod druge i saberemo ih:

$$\overrightarrow{KM} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CK}$$
$$\underline{\overrightarrow{KM} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BK}}$$
$$2\overrightarrow{KM} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CK} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BK}$$

Sad pogledamo sliku i uočimo suprotne vektore (istog pravca i intenziteta a suproznog smera).

$$2\overrightarrow{KM} = \overrightarrow{AC} + \boxed{\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}} + \boxed{\overrightarrow{BK} + \overrightarrow{CK}}$$

Uokvireni su nula vektori, pa je:

$$2\overrightarrow{KM} = \overrightarrow{AC}$$

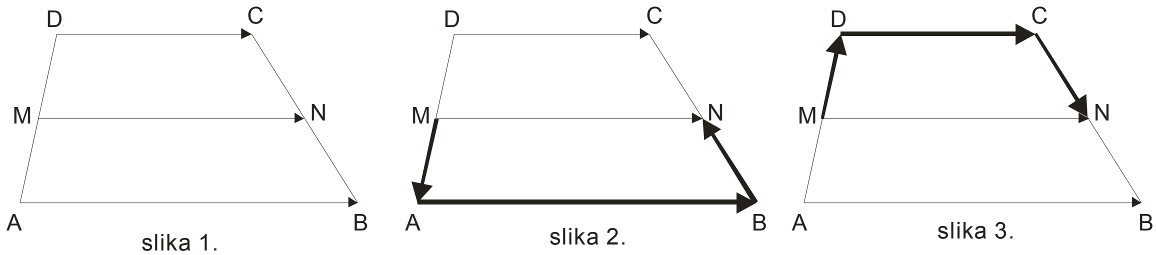
Primer 3.

Dat je trapez ABCD. Ako je M središte stranice AD, a N središte stranice BC, tada je $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}\right)$

Dokazati.

Rešenje:

Ovo je ustvari dokaz činjenice da je srednja linija trapeza jednaka polovini zbira osnovica $m = \frac{a+b}{2}$



slika 1. slika 2. slika 3.

Najpre ćemo vektor MN izraziti odozdo (slika 2.) pa odozgo (slika 3.), pa to sabrati…

$$\overrightarrow{MN} = \cancel{\overrightarrow{MA}} + \overrightarrow{AB} + \cancel{\overrightarrow{BN}}$$

$$\overrightarrow{MN} = \cancel{\overrightarrow{MD}} + \overrightarrow{DC} + \cancel{\overrightarrow{CN}}$$

$2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}$ suprotni vektori se potiru, to jest daju nula vektor

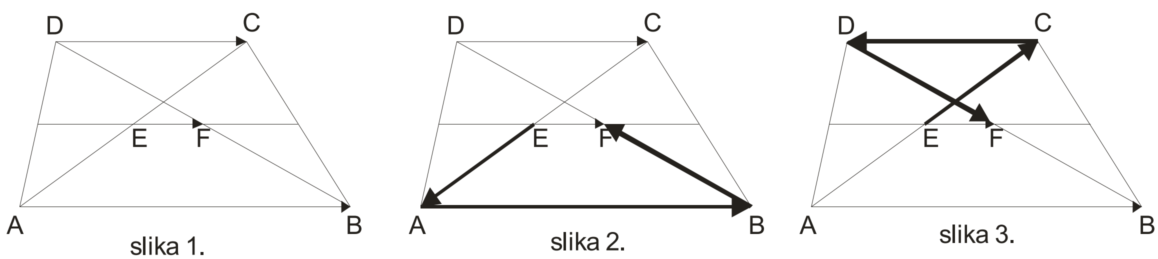
Još da celu jednakost podelimo sa 2 i dobijamo $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}\right)$.

$\boxed{\text{Primer 4.}}$

Neka su M i N središta neparalelnih stranica BC i AD trapeza ABCD, a E i F presečne tačke duži MN i dijagonala AC i BD. Tada je $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC}\right)$

<u>Rešenje:</u>

I u ovom zadatku se koristi **isti trik**, al je putanja izražavanja vektora u sredini malo čudna , da vidimo:



slika 1. slika 2. slika 3.

Na slici 2. vektor EF izražavamo preko: $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF}$.

Na slici 3. vektor EF izražavamo preko: $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DF}$

Napišemo ove dve jednakosti jednu ispod druge, saberemo ih i potremo suprotne vektore…

$$\overrightarrow{EF} = \cancel{\overrightarrow{EA}} + \overrightarrow{AB} + \cancel{\overrightarrow{BF}}$$

$$\overrightarrow{EF} = \cancel{\overrightarrow{EC}} + \overrightarrow{CD} + \cancel{\overrightarrow{DF}}$$

$$2\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$$

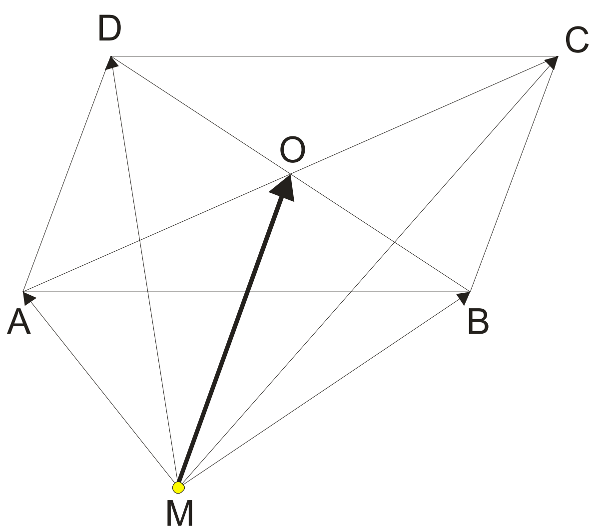
Znamo da važi : $\overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{DC}$, ubacimo ovo u dobijenu jednakost i evo rešenja: $2\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC}$.

Naravno ,ovo sve podelimo sa 2 i dobijamo: $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC}\right)$.

Primer 5.

Ako je M proizvoljna tačka u ravni paralelograma ABCD , tada je $4\overrightarrow{MO} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}$, gde je O tačka preseka dijagonala paralelograma. Dokazati.

Rešenje:



Vektor MO ćemo izraziti na 4 načina pa te jednakosti sabrati:

$$\overrightarrow{MO} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AO}$$
$$\overrightarrow{MO} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BO}$$
$$\overrightarrow{MO} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CO}$$
$$\underline{\overrightarrow{MO} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DO}}$$
$$4\overrightarrow{MO} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DO}$$

Pretumbajmo malo ovu jednakost u smislu da uočimo suprotne vektore:

$4\overrightarrow{MO} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} + \boxed{\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{CO}} + \boxed{\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{DO}}$ (pogledajte na slici, ovo su suprotni vektori)

$$4\overrightarrow{MO} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}$$

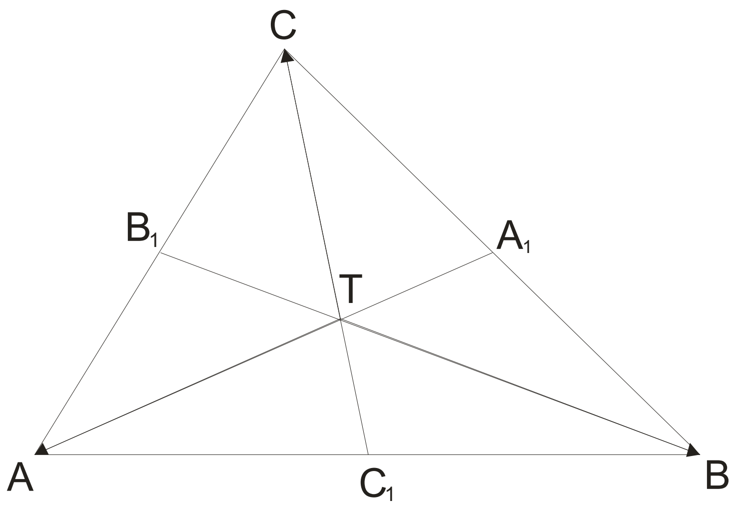
Primer 6.

Ako je T težište trougla ABC, tada je $\overrightarrow{TA}+\overrightarrow{TB}+\overrightarrow{TC}=0$. Dokazati.

<u>Rešenje:</u>

Da se podsetimo: težišna duž spaja teme i sredinu naspramne stranice; sve tri težišne duži seku se u jednoj tački *T* koja je težište trougla; težište deli težišnu duž u odnosu 2:1.

Da nacrtamo sliku:



Krenućemo od $\overrightarrow{TA}+\overrightarrow{TB}+\overrightarrow{TC}=$ **i dokazati** da je ovaj zbir nula.

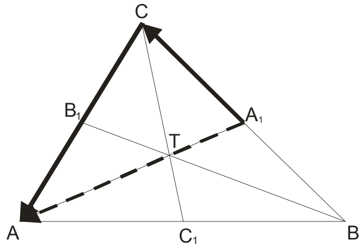
Rekosmo da težište deli težišnu duž u odnosu 2:1, pa je:

$$\overrightarrow{TA}=\frac{2}{3}\overrightarrow{A_1A}$$

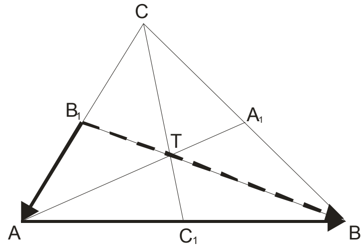
$$\overrightarrow{TB}=\frac{2}{3}\overrightarrow{B_1B}$$ Saberemo ove tri jednakosti i dobijamo: $$\overrightarrow{TA}+\overrightarrow{TB}+\overrightarrow{TC}=\frac{2}{3}(\overrightarrow{A_1A}+\overrightarrow{B_1B}+\overrightarrow{C_1C})$$

$$\overrightarrow{TC}=\frac{2}{3}\overrightarrow{C_1C}$$

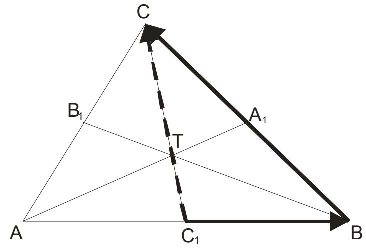
Dalje ćemo izraziti svaki od ovih vektora (pogledaj na slici, to su isprekidano nacrtani vektori):



$\overrightarrow{A_1A}=\overrightarrow{A_1C}+\overrightarrow{CA}$



$\overrightarrow{B_1B}=\overrightarrow{B_1A}+\overrightarrow{AB}$



$\overrightarrow{C_1C}=\overrightarrow{C_1B}+\overrightarrow{BC}$

Saberemo ove tri jednakosti:

$$\overrightarrow{A_1A} = \overrightarrow{A_1C} + \overrightarrow{CA}$$
$$\overrightarrow{B_1B} = \overrightarrow{B_1A} + \overrightarrow{AB}$$
$$\overrightarrow{C_1C} = \overrightarrow{C_1B} + \overrightarrow{BC}$$
$$\overrightarrow{A_1A} + \overrightarrow{B_1B} + \overrightarrow{C_1C} = \overrightarrow{A_1C} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{B_1A} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{C_1B} + \overrightarrow{BC}$$

Pretumbajmo malo desnu stranu jednakosti:

$$\overrightarrow{A_1A} + \overrightarrow{B_1B} + \overrightarrow{C_1C} = \boxed{\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} + +\overrightarrow{BC}} + \overrightarrow{A_1C} + \overrightarrow{B_1A} + \overrightarrow{C_1B}$$

Zaokruženi vektori imaju zbir nula, jer se zadnji vektor završava gde počinje prvi...

Pogledajmo sada preostali zbir $\overrightarrow{A_1C} + \overrightarrow{B_1A} + \overrightarrow{C_1B}$, i on je nula, jer je:

$$\overrightarrow{A_1C} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$$
$$\overrightarrow{B_1A} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$$
$$\overrightarrow{C_1B} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$
$$\overrightarrow{A_1C} + \overrightarrow{B_1A} + \overrightarrow{C_1B} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{2} \cdot 0 = 0$$

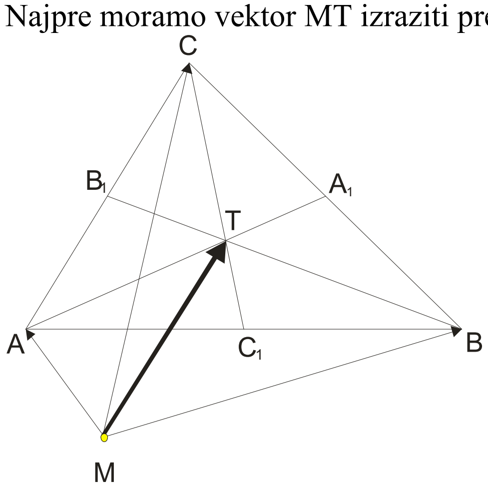
E, ovim je dokaz konačno završen.

Primer 7.

Ako je M proizvoljna tačka u ravni trougla ABC , tada je $\overrightarrow{MT} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right)$, gde je T težište trougla. Dokazati.

Rešenje:

Najpre moramo vektor MT izraziti preko vektora MA,MB i MC.



$\overrightarrow{MT} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AT}$

$\overrightarrow{MT} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BT}$ saberemo ove tri jednakosti...

$\overrightarrow{MT} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CT}$

$$\overrightarrow{MT} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AT}$$
$$\overrightarrow{MT} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BT}$$
$$\underline{\overrightarrow{MT} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CT}}$$
$$3\overrightarrow{MT} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \boxed{\overrightarrow{AT} + \overrightarrow{BT} + \overrightarrow{CT}}$$

U prethodnom primeru smo videli da ovo uokvireno daje nula vektor, pa je: $3\overrightarrow{MT} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$, a to smo i trebali dokazati.