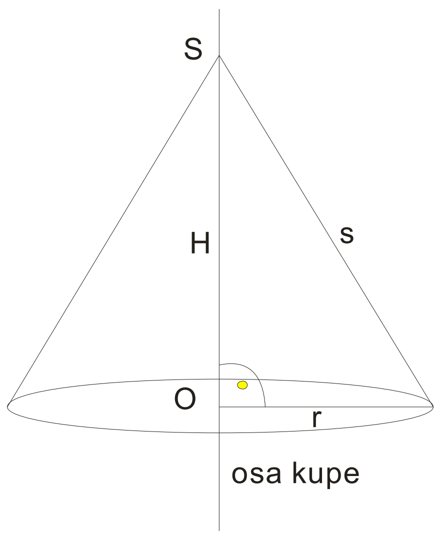
KUPA I ZARUBLJENA KUPA

KUPA

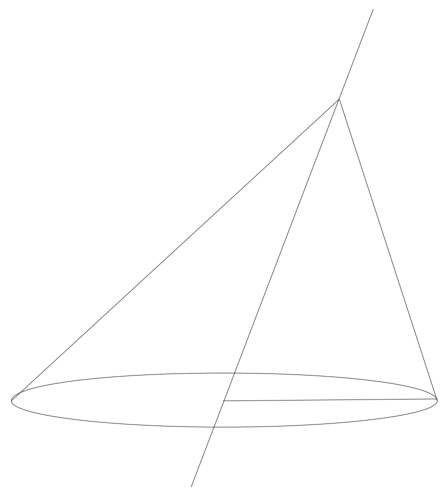
Površina baze: $B = r^2 \pi$
Površina omotača: $M = s r \pi$

P= B+M to jest $P = r\pi(r + s)$

$V = \frac{1}{3} BH$ **to jest** $V = \frac{1}{3} r^2 \pi H$



prava kupa



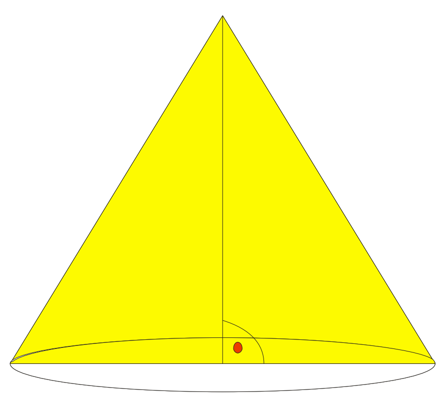
kosa kupa

Osni presek:

Obim osnog preseka: $O_{op} = 2r+2s$

Površina osnog preseka: $P_{op} = rH$

Primena pitagorine teoreme: $H^2 + r^2 = s^2$



Ravnostrana (jednakostrana) kupa je ona kod koje je $2r = s$, pa je osni presek jednakostranicni trougao.

ZARUBLJENA KUPA

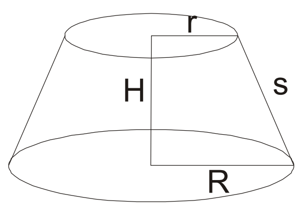
Površina donje baze: $B_1 = R^2 \pi$

Površina gornje baze: $B_2 = r^2 \pi$

Površina omotača : $M = s(R+r)\pi$

$P = B_1+B_2+M$ **to jest** $P = \pi\,[R^2+r^2+s(R+r)]$

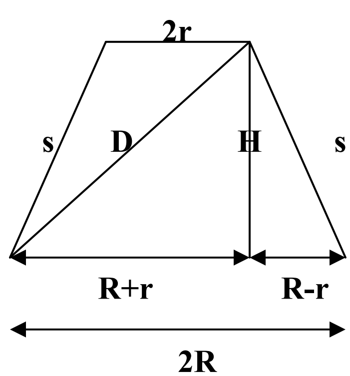
$V = \frac{H}{3}\left(B_1+B_2+\sqrt{B_1 B_2}\right)$ **to jest** $V = \frac{H\pi}{3}(R^2+Rr+r^2)$



Osni presek:

Obim osnog preseka: $O_{op} = 2R + 2r + 2s$

Površina osnog preseka: $P_{op} = (R+r)H$



Primena pitagorine teoreme (na ova dva pravougla trougla):

$H^2+(R-r)^2 = s^2$ **(na desni trougao)**

$H^2+(R+r)^2 = D^2$ **(na levi trougao)**

ZADACI

1) Površina kupe je 24π , a površina njene osnove je 9π . Izračunati zapreminu kupe.

Rešenje:

$$P = 24\pi cm^2 \qquad B = r^2\pi \qquad M = r\pi s$$

$$B = 9\pi cm^2 \qquad 9\pi = r^2\pi \qquad 15\pi = 3\cdot\pi\cdot s$$

$$V = ? \qquad r = 3cm \qquad s = 5cm$$

$$H^2 = s^2 - r^2 \qquad V = \frac{1}{3}BH$$

$$H^2 = 5^2 - 3^2$$

$$H^2 = 25 - 9 \qquad V = \frac{1}{3}\cdot 9\pi\cdot 4$$

$$H^2 = 15 \qquad V = 12\pi cm^3$$

$$H = 4cm$$

2) Dužina visine i izvodnice prave kupe odnosi se kao 4:5 a njena zapremina je 96π . Naći površinu kupe.

Rešenje:

$$H : s = 4 : 5$$

$$V = 96\pi$$

$$P = ?$$

Čim imamo neku razmeru koristimo "trik sa **k**''

$H : s = 4 : 5 \Rightarrow H = 4k$ i $s = 5k$

Iskoristimo Pitagorinu teoremu:

$$r^2 = s^2 - H^2$$

$$r^2 = (5k)^2 - (4k)^2$$

$$r^2 = 25k^2 - 16k^2$$

$$r^2 = 9k^2$$

$$r = 3k$$

Pošto nam je data zapremina:

$$V = \frac{r^2\pi H}{3}$$

$$96\pi = \frac{(3k)^2\pi\cdot 4k}{3}$$

$$96 = 12k^3$$

$$k^3 = 8$$

$$k = 2$$

$$H = 4k = 8$$

$$s = 5k = 10$$

$$r = 3k = 6$$

Sad računamo površinu:

$$P = r\pi(r + s)$$

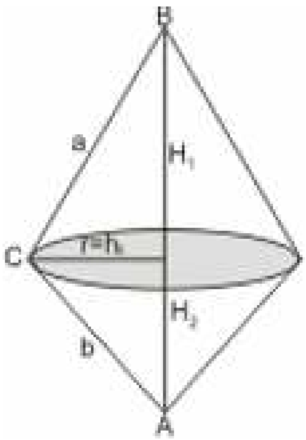
$$P = 6\pi(6 + 10)$$

$$P = 96\pi$$

3) Pravougli trougao sa katetama *a* i *b* rotira oko hipotenuze. Naći zapreminu dobijenog obrtnog tela.

Rešenje:

I ovde će slika biti "presudna"



RAZMIŠLJAMO:

→ Na ovaj način se dobijaju dve kupe (priljubljene)
→ Poluprečnik osnove obe kupe je h_C $(r = h_C)$
→ Zbir visina ove dve kupe daje hipotenzu c
→ Zapreminu moramo da izračunamo preko *a* i *b*

$$V = V_1 + V_2$$

$$V = \frac{r^2\pi H_1}{3} + \frac{r^2\pi H_2}{3} = \frac{r^2\pi}{3}(H_1 + H_2)$$

$$V = \frac{r^2\pi \cdot c}{3} \quad (\text{ jer je } H_1 + H_2 = C)$$

Iz obrazaca za površinu pravouglog trougla je: $\frac{ch_C}{2} = \frac{a \cdot b}{2} \Rightarrow ch_C = ab$

$$V = \frac{h_C\pi \cdot h_C \cdot C}{3} = \frac{h_C \cdot \pi \cdot ab}{3} \quad \text{i} \quad h_C = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$V = \frac{a^2b^2\pi}{3\sqrt{a^2 + b^2}}$$

4) Zapremina zarubljene kupe jednaka je 584π, a poluprečnici osnova su 10 i 7. Naći visinu zarubljene kupe.

Rešenje:

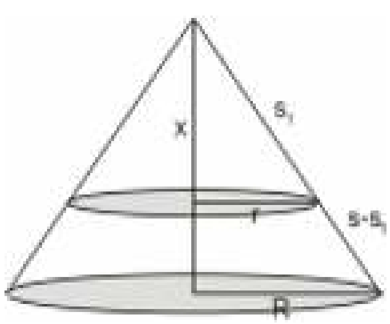
$$V = 584\pi$$
$$R = 10$$
$$r = 7$$
$$\overline{}$$
$$H = ?$$

$$V = \frac{H\pi}{3}(R^2 + r^2 + Rr)$$
$$584\pi = \frac{H\pi}{3}(10^2 + 7^2 + 10\cdot 7)$$
$$584 = \frac{H}{3}(100 + 49 + 70)$$
$$584 = \frac{H}{3}\cdot 219$$
$$584 = H\cdot 73$$
$$H = 8$$

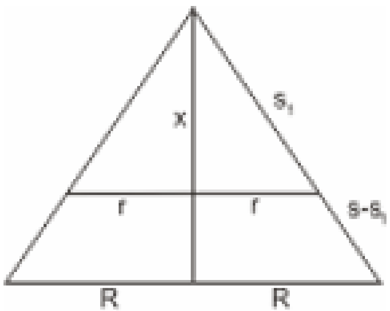
5) Na kom rastojanju od vrha kupe, čija je visina H, treba postaviti ravan paralelno sa osnovom koja deli omotač kupe na dva dela jednakih površina.

Rešenje:

Neka je X traženo odstojanje. Očigledno da ovakvim presekom kupe dobijamo manju kupu i zarubljenu kupu.



Izvucimo osni presek “na stranu’’



Iz sličnosti trougla očigledno proizilazi:

$$R : r = H : X = s : s_1$$

Od nas se traži da omotači budu jednaki, tj. da omotač kule $M_1 = s_1 r\pi$ bude isti sa omotačem zarubljene kupe $M_2 = (s - s_1)(R + r)\pi$

Dakle: $M_1 = M_2$

$$s_1 r\pi = (s - s_1)(R + r)\pi$$
$$s_1 r = sR + sr - s_1 R - s_1 rr$$
$$2s_1 r + s_1 R = sR + sr$$
$$s_1(2r + R) = s(R + r)$$
$$s : s_1 = (2r + R) : (R + r)$$

Ako ovo upakujemo sa već dobijenom proporcijom $s : s_1 = R : r$, dobijamo:

$$R : r = (2r + R) : (R + r)$$
$$R(R + r) = r(2r + r)$$
$$R^2 + Rr = 2r^2 + rR$$
$$R^2 = 2r^2$$
$$R = \sqrt{2}r$$
$$R : r = \sqrt{2}$$

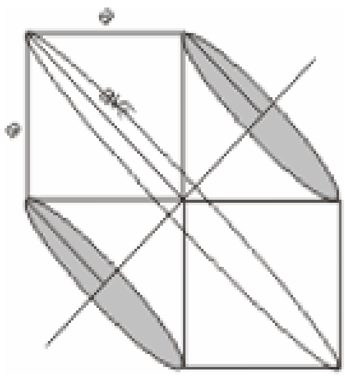
Kako je: $H : X = R : r$

$$H : X = \sqrt{2}$$
$$X = \frac{H}{\sqrt{2}}$$
$$X = \frac{H}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$
$$X = \frac{H\sqrt{2}}{2}$$

6) Kvadrat ABCD stranice a rotira oko ose koje prolazi kroz teme C paralelno sa BD. Naći zapreminu dobijenog tela.

Rešenje:

Pažljivo nacrtajte sliku, jer i ovde ona sve govori.



Sa slike se vidi da se radi o dve "priljubljene'' zarubljene kupe iz kojih je izvučena po jedna kupa.
Očigledno je da poluprečnik veće osnove zarubljene kupe $R = a\sqrt{2}$ (dijagonala kvadrata), a poluprečnik manje osnove zarubljene kupe je $r = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, tj. polovina dijagonale kvadrata. (istovremeno i r kupe). Takodje je visina i kupe i zarubljene kupe takodje polovina dijagonale, tj. $H = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

Zapreminu tela ćemo naći kada od zapremine zarubljene kupe oduzmemo zapreminu kupe, pa to pomnožimo sa dva.

$$V = 2(V_{ZK} - V_K)$$

$$V = 2\left(\frac{H\pi}{3}(R^2 + Rr + r^2) - \frac{r^2\pi H}{3}\right)$$

$$V = 2\cdot\frac{H\pi}{3}(R^2 + Rr + r^2 - r^2)$$

$$V = \frac{2}{3}H\pi(R^2 + Rr)$$

$$V = \frac{2}{3}\cdot\frac{a\sqrt{2}}{3}\pi\left[\left(a\sqrt{2}\right)^2 + \left(a\sqrt{2}\right)\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)\right]$$

$$V = \frac{a\sqrt{2}}{3}\pi\left[\frac{3a^2\cdot 2}{2}\right]$$

$$V = a^3\sqrt{2}\pi$$

Zanimljivo da bi površinu tela našli kao zbir površina omotača zarubljene kupe i kupe, pa putu dva.

$$P = 2(M_{ZK} - M_K)$$

Ali se ovo u zadatku ne traži, Vi možete radi treninga uraditi i ovo.

7) Prava zarubljena kupa ima izvodnicu $s = 5$ i poluprečnike osnova $R = 5$ i $r = 1$. Naći poluprečnik osnove pravog valjka koji ima s njom jednaku visinu i površinu omotača.

Rešenje:

$$s = 5$$
$$R = 5$$
$$r = 1$$

Omotač zarubljene kupe je $M = s(R + r)\pi$

Dakle:

$$M = 5(5+1)\pi$$
$$M = 30\pi$$

Visinu zarubljene kupe ćemo dobiti iz Pitagorine teoreme:

$$s = H^2 + (R + r)^2$$
$$5^2 = H^2 + (5+1)^2$$
$$H^2 = 25 - 16$$
$$H^2 = 9$$

$H = 3 \rightarrow$ Ovo je istovremeno i visina valjka

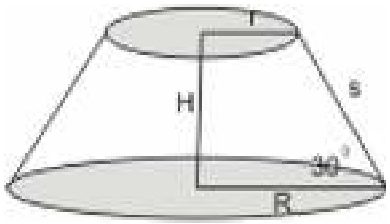
Omotač valjka je $M_V = 2r\pi H$

$$M_V = 2r\pi H$$
$$30\pi = 2 \cdot r\pi \cdot 3$$
$$30 = 6r$$
$$r = 5$$

Dakle, poluprečnik osnove valjka je 5

8) Izračunaj površinu osnog preseka zarubljene kupe ako je površina omotača $M = 10\pi$ i ugao izvodnice prema ravni osnove je 30^0.

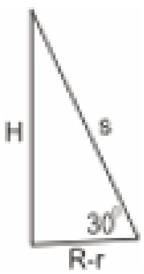
Rešenje:



$$M = 10\pi$$

$$P_{OP} = ?$$

Izvucimo trougao na kome primenjujemo Pitagorinu teoremu:



$$M = 10\pi$$
$$s(R+r)\pi = 10\pi$$
$$s(R+r) = 10$$

Odavde je:

$$\sin 30^o = \frac{H}{s}$$
$$H = s\sin 30^o$$
$$H = s \cdot \frac{1}{2}$$
$$H = \frac{s}{2}$$

Površina osnog preseka je: (površina trapeza)

$$P_{OP} = \frac{2R+2r}{2} \cdot H = \frac{2(R+r)}{2} \cdot H = (R+r) \cdot H$$
$$P_{OP} = (R+r) \cdot \frac{s}{2} = \frac{(R+r) \cdot s}{2}$$
$$P_{OP} = \frac{10}{2}$$
$$P_{OP} = 5$$